

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

35. Band, Heft 7/9

1. Dezember 1950

S. 289—432

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines:

**Bottema, O.:** Eine Chancenberechnung von Emanuel Lasker. Simon Stevin, wis. natuurrk. Tijdschr. **27**, 1—5 (1950) [Holländisch].

Für ein Laskersches Würfelspiel (E. Lasker, Brettspiele der Völker, 1931, Berlin, S. 198f.) werden die Chancen mit rekurrenten Reihen allgemein berechnet.  
*R. Sprague.*

• **Sade, Albert:** Enumération des carrés latins. Application au 7<sup>e</sup> ordre. Conjecture pour les ordres supérieurs. Marseille: Chez l'auteur 1948; 8 p.

Nach einem kurzen historischen Überblick entwickelt Verf. eine durchsichtige Methode zur Aufteilung der lateinischen Quadrate gegebener Ordnung in leichter übersehbare Gruppen durch gewisse Invarianten (in Abschnitt 12 muß es  $P = 2c3g2h$  und  $Y = 2bd3gh$  heißen) und reduziert so das Arbeiten mit Tabellen stark. Für die 7. Ordnung bestimmt er die Anzahl zu 16942080. Die abweichenden Ergebnisse von Vorgängern werden diskutiert, Vermutungen über höhere Ordnungen ausgesprochen. Literaturangaben.  
*R. Sprague* (Berlin).

• **Sade, Albert:** Enumération des carrés latins de côté 6. Marseille: Chez l'auteur 1948. 2 p.

Auf kurze und übersichtliche Art bestätigt Verf. die bereits von Frolov [Math. spéc. de Longchamps **3**, 1—4 (1890)] und später von R. A. Fisher und Yates [Proc. Cambridge philos. Soc. **30**, 492—507 (1934); dies. Zbl. **10**, 103] angegebene Anzahl 9408 der lat. Quadrate von 6 Elementen. Er vereinfacht damit die von S. M. Jacob [Proc. Lond. math. Soc., II. S. **5**, 31 (1930)] benutzte Methode, der nur 8192 gefunden hatte, und stellt eine dort fehlerhafte kombinatorische Formel richtig.  
*R. Sprague.*

• **Sade, Albert:** Sur les suites hautes des permutations. Marseille: Chez l'auteur 1949, 12 p.

Als „suite haute“ (Leseabschnitt) in einer Permutation der Elemente  $1, 2, \dots, n$  definiert Verf. die Folge der Elemente  $e, e+1, \dots, e+k$  ( $k \geq 0$ ), falls deren Platznummern aufsteigen und weder  $e-1$  links von  $e$  noch  $e+k+1$  rechts von  $e+k$  steht. Die Permutationen, welche genau  $m$  Leseabschnitte beliebiger Längen aufweisen, bilden die  $m$ -te „classe haute“. Der erste Teil der Arbeit behandelt die Verteilung der Permutationen auf diese Klassen, der zweite befaßt sich mit denjenigen Permutationen, deren längster Leseabschnitt eine gegebene Länge hat.

*R. Sprague* (Berlin).

• **Sade, Albert:** Décomposition des locomotions en facteurs de classe haute donnée. Marseille: Chez l'auteur 1949. 8 p.

Der Übergang von einer Anordnung von  $n$  Dingen zu einer andern wird üblicherweise beschrieben durch die Änderung des Dinges bei festgehaltenem Ort (Substitution). Manchen Problemen scheint eine etwas andere Betrachtungsweise besser angepaßt, die sich auf die Änderung der Platznummer bei festgehaltenem Ding erstreckt. Diese Operationen heißen nach T. B. Sprague [Trans. R. Soc. Edinburgh **37**, 399—411 (1892)] Lokomotionen; sie lassen sich in Klassen einteilen nach der Anzahl aufsteigender Folgen (Leseabschnitte), die sie, angewandt auf die natürliche Anordnung  $1, 2, \dots, n$ , erzeugen. Verf. zeigt interessante Sätze über Zerlegbarkeit — z. B. ist bei festem  $n$  jede Lok. der Klasse  $s = t \cdot u$  eindeutig darstellbar als Produkt



einer Lok. der Klasse  $t$  mit einer solchen der Klasse  $u$  —, über Vertauschbarkeit und weist auf Beziehungen hin zu Gruppen, arithmet. Reihen und lat. Quadraten.

*R. Sprague* (Berlin).

• **Sade, Albert:** *Sur les chevauchements des permutations.* Marseille: Chez l'auteur 1949. 8 S.

Zwei Elemente  $a, b$  in einer Permutation der Elemente  $1, 2, \dots, n$  bilden ein Chevauchement, wenn die Paare  $a, a+1$  und  $b, b+1$  einander trennen und  $a \equiv b \pmod{2}$  ist. Permutationen ohne Chev. heißen planar. Ihre Anzahl bildet die Antwort zu der Frage, auf wieviel Arten man  $n$  in gerader Reihe aneinanderhängende Briefmarken zu einer einzigen von  $n$ -facher Dicke zusammenfalten kann. Einschlägige Abschätzungen und Untersuchungen über Zusammenhänge mit Inversionen und mit Folgen, wobei die Elemente  $e, e+1, \dots, e+k$  eine aufsteigende Folge der Länge  $k > 0$  bilden, wenn ihre Platznummern monoton zunehmen und weder  $e-1$  noch  $e+k+1$ , falls vorhanden, sich dieser Ordnung anfügen. *Sprague.*

**Dickinson, David:** *On sums involving binomial coefficients.* Amer. math. Monthly **57**, 82—86 (1950).

C'est une extension de la formule de Cournot [cf. Cr. Ramus, J. reine angew. Math. **11**, 354 (1834); B. Tedeschi, Boll. Un. mat. Ital. **12**, 22 (1933); ce Zbl. **6**, 98; L. Toscano, Tôhoku math. J. **36**, 78 (1932); ce Zbl. **5**, 150]. L'auteur cherche la somme finie,  $S = \sum \binom{n+a}{b+c} k$  des coefficients binomiaux dont les deux arguments sont en progression arithmétique. 1. les termes de  $S$  sont alignés dans le triangle de Stiefel. 2. si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux,  $S$  ne dépend que du „determinant“  $nc-ab=m$ . La valeur correspondante,  $S_m$ , satisfait à l'équation aux différences:  $S_m = S_{m-c+a} + S_{m-c}$ , qui est intégrée par les voies habituelles. 3. le cas général se ramène à 2. par changement de notation. Si  $a=0$ , on retrouve le résultat de Ramus. — L'A. se borne aux valeurs positives de  $n$ , car il considère  $\binom{n}{b}$  comme nul si  $b$  n'est pas compris entre 0 et  $n$ . L'examen du plan cartésien complet [C. M. Martino, Ist. Lombardo, Rend., III. S. **74**, 305—309 (1941); ce Zbl. **26**, 196] n'est pas abordé.

*A. Sade* (Marseille).

**Pierucci, Mariano:** *Un tentativo di estensione del concetto di numero complesso e sue eventuali applicazioni alla fisica teorica.* Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **1**, 5—11 (1947).

Die in einer früheren Note [M. Pierrucci: Nuovo Cimento **19**, 281—290] (1942); dies. Zbl. **28**, 103] durchgeführten Betrachtungen werden verallgemeinert und weiter ausgebaut.

*Kriszten* (Zürich).

### Lineare Algebra. Polynome. Formen:

**Skol'nik, A. G.:** *Lineare Ungleichungen.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 189—192 (1950) [Russisch].

Let

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + a_{k,r+1} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r+1)$$

be a system of  $r+1$  linear inequalities of rank  $r$  in  $n$  unknowns such that, say, the determinant

$$D = |a_{ki}|_{k,i=1,2,\dots,r} \neq 0.$$

Denote by  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{r+1} = D$  the cofactors of the last column of the determinant

$$\delta = |a_{ki}|_{k,i=1,2,\dots,r+1}.$$

For  $\delta \neq 0$ , let  $\chi$  be the number of those  $\Delta_i$  for which  $\operatorname{sgn} \Delta_i = \operatorname{sgn} \delta$ ; if, however,  $\delta = 0$ , then denote by  $\chi$  the sign opposite to that assumed by at least half of the  $\Delta_i$ . Then the inequalities (1) are non-contradictory and have an  $n$ -dimensional solution



if and only if  $\chi > 0$ , and they are independent if and only if  $\chi = 1$ . Analogous results for systems (1) of rank less than  $r$  are obtained by considering their subsystems.

K. Mahler (Manchester).

Wielandt, Helmut: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z., Berlin 52, 642—648 (1950).

Verf. beweist Sätze von Frobenius auf einem neuen, erheblich kürzeren Wege und gelangt dabei zugleich zu Erweiterungen der Sätze. Eine Matrix  $A$  mit nicht-negativen Elementen  $a_{\mu\nu}$  heißt zerlegbar, wenn  $a_{\mu\nu} = 0$  ist für  $\nu = 1, 2, \dots, r$ ;  $\mu = r + 1, \dots, n$  oder wenn dies durch Umstellung von Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten erreicht werden kann; für unzerlegbare nichtnegative Matrizen gilt: Die charakteristische Gleichung  $\Phi(x) = \det(xE - A) = 0$  hat eine einfache positive Wurzel  $r$ , die „Maximalwurzel“, die dem Betrage nach von keiner anderen Wurzel übertroffen wird.  $r$  ist der einzige Eigenwert, zu dem eine nicht-negative Eigenlösung existiert. Hat  $\Phi(x) = 0$  insgesamt  $k$  Wurzeln vom Betrag  $r$ , so sind diese einfach und haben die Werte  $r e^{2\pi i/k}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ).  $A$  hat dann die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Teilmatrizen  $A_{\mu\nu}$  oder kann durch Umstellung von Zeilen und Spalten auf diese Form gebracht werden. Ist  $B = (b_{\mu\nu})$  eine Matrix mit komplexen Elementen mit  $|b_{\mu\nu}| \leq a_{\mu\nu}$  und  $\beta$  eine Wurzel von  $\det(xE - B) = 0$ , so gilt  $|\beta| \leq r$ , und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $B$  die Gestalt  $B = e^{i\varphi} D A D^{-1}$  hat; dabei ist  $D$  eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente sämtlich den absoluten Betrag 1 haben. Als Beweismittel verwendet Verf. ein Maximum-Minimumprinzip: Zu einem beliebigen Vektor  $\mathbf{r}$  mit den Komponenten

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_{\nu}$$

$x_{\mu} \geq 0$  wird eine Zahl  $r_{\mathbf{r}} = \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_{\nu}}{x_{\mu}}$  definiert (der Bruch ist notfalls  $+\infty$ , falls  $x_{\mu} = 0$ ; es sollen aber nicht alle  $x_{\mu} = 0$  sein). Die Zahlen  $r_{\mathbf{r}}$  sind nach oben beschränkt. Die obere Grenze aller Zahlen  $r_{\mathbf{r}}$  ist die Maximalwurzel  $r$ . Collatz.

Smiley, M. F.: The rational canonical form of a matrix. II. Amer. math. Monthly 56, 542—544 (1949).

Die Begleitmatrix eines normierten Polynoms  $f(x)$  mit Koeffizienten aus einem Körper  $K$  wird durch eine Kette explizit angegebener Ähnlichkeitstransformationen in  $K$  auf die rationale Normalform gebracht, die im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers mit der Jordanschen Normalform identisch ist. Da im ersten Teil der Arbeit [Amer. math. Monthly 49, 451—454 (1942)] eine beliebige Matrix mit denselben Hilfsmitteln in eine direkte Summe von Begleitmatrizen transformiert worden war, ergibt sich insgesamt ein Verfahren zur Herstellung der rationalen Normalform beliebiger Matrizen ohne Benutzung der Elementarteiler. Wielandt.

Parodi, Maurice: Sur une méthode de formation de matrices définies positives. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I 63, 127—129 (1949).

Es sei  $A$  eine  $n$ -reihige quadratische Matrix mit  $\det A > 0$ . Dann ist nach Ostrowski (dies. Zbl. 16, 3) auch  $\det(A + B) > 0$ , falls die absoluten Beträge  $|b_{ij}|$  der Elemente von  $B$  gemäß der Bedingung  $\max_{i,j=1,\dots,n} |b_{ij}| = \delta < \left( \sum_{k,l=1}^n |a^{kl}| \right)^{-1}$  gewählt werden, wobei  $(a^{kl}) = A^{-1}$  ist. Diesen Satz benutzt Verf. zur Konstruktion positiv definiter Matrizen. Ausgehend von der Matrix  $A = (a_{ij})$  mit  $a_{ii} = a > 1$  und  $a_{ij} = 1$  für  $i \neq j$ , für welche  $\det(A - \lambda E)$  die Nullstellen  $\lambda_1 = a + n - 1$  und  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = a - 1$  hat, ergeben sich für die Elemente  $a^{kl}$  der inversen



Matrix  $A^{-1}$  die Werte

$$a^{kk} = \frac{1}{a-1} \frac{a+n-2}{a+n-1} \text{ und } a^{kl} = \frac{-1}{(a-1)(a+n-1)} \text{ für } k \neq l,$$

so daß  $\delta < \frac{a-1}{n} \frac{a+n-1}{a+2n-3}$  zu wählen ist.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

**Gyires, Béla:** Funktionensysteme mit vertauschbaren Gramschen Matrizen. Hung. Acta Math. **1**, 28—32 (1949).

Es seien  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  im gleichen Intervall definierte, stetige, reelle und linear unabhängige Funktionen,  $F$  ihre Gramsche Matrix. Dann werden alle Systeme von Funktionen  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  mit denselben Eigenschaften bestimmt (das Definitionsintervall darf für jedes  $g$ -System ein anderes sein), deren Gramsche Matrix  $G$  mit  $F$  vertauschbar ist. Man kann nämlich  $F$  und ebenso jedes  $G$  als Matrix einer regulären positiv-definiten quadratischen Form auffassen. Ferner werden für die Gleichheit zweier Matrizen  $G$  der verlangten Art notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben.

Rohrbach (Mainz).

**Gyires, Béla:** Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt von zueinander transponierten Matrizen. Hung. Acta Math. **1**, 33—35 (1949).

Für eine reelle symmetrische Matrix  $A$  mit  $|A| \neq 0$  werden alle Lösungen  $M$  mit  $MM' = A$  aus einer speziellen Lösung (der Quadratwurzel aus  $A$ ) abgeleitet. Es gilt: Wird  $A$  durch orthogonales  $P$  auf Diagonalforn  $D$  transformiert, so ist  $M = PD^{\frac{1}{2}}O$  mit beliebiger Orthogonalmatrix  $O$  die allgemeine Lösung.

Rohrbach (Mainz).

**Lepage, Th.-H.:** Sur un théorème de Kronecker relatif aux sous-déterminants d'une matrice symétrique. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **33**, 288—299, 527—541 (1947).

Es seien  $\Omega_p$  und  $\Gamma$  zwei alternierende Formen (schiefsymmetrische Tensoren) vom Grade  $p$  bzw. 2 im linearen Raum  $L_N$  von  $N \geq 2n$  Dimensionen, ferner sei  $\Gamma$  vom Range  $2n$  und kanonisch dargestellt durch  $\Gamma = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$ . Man bilde

$\omega_i = \eta_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} \xi_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Verf. zeigt: Dann und nur dann hat  $\Omega_p$  den Faktor  $\Gamma$ , wenn die Form  $\Omega_p \omega_1 \cdots \omega_n$  für jede symmetrische Matrix  $P = (p_{ij})$  verschwindet. Die Multiplikation ist stets als alternierende (äußere) zu verstehen, d. h.  $\Omega_p \Omega_q = (-1)^{pq} \Omega_q \Omega_p$ . Im Spezialfall  $N = 2n$ ,  $p = n$  ist  $\Omega_n \omega_1 \cdots \omega_n = (1/n!) F(p_{ij}) \Gamma^n$ , wo  $F(p_{ij})$  ein lineares Polynom in den Unterdeterminanten jeder Ordnung von  $P$  bedeutet. Hat  $\Omega_n$  den Faktor  $\Gamma$ , so ist  $F(p_{ij}) = 0$  und umgekehrt. Daher erhält man alle linearen Relationen zwischen den Unterdeterminanten von  $P$  [und hierauf bezieht sich ein Satz von Kronecker (S.-B. Preuß. Akad. Wiss. **1882**, 821—824; vgl. auch C. Runge, J. reine angew. Math. **93**, 319 bis 327 (1882)], indem man alle Formen betrachtet, die den Faktor  $\Gamma$  besitzen. — Der Beweis des oben genannten Kriteriums, das neben dem Satz von Kronecker auch einen Satz von J. Radon liefert [dies. Zbl. **21**, 291], operiert in einer alternierenden Formenalgebra über dem  $L_{2n}$  und benutzt insbesondere einen eigens hierfür geschaffenen Divisionsalgorithmus.

Rohrbach (Mainz).

**Vandiver, H. S.:** Quadratic relations involving the numbers of solutions of certain types of equations in a finite field. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 681—685 (1949).

Bezeichne  $F(p^n)$  den endlichen Körper mit  $p^n$  Elementen ( $p$  ungerade Primzahl),  $g$  ein primitives Element der zyklischen Gruppe der Elemente ( $\neq 0$ ) von  $F(p^n)$ ,  $m_1, m_2$  zwei Teiler von  $p^n - 1$ . Es handelt sich um die Anzahl  $(i, j)_{m_1 m_2}$  der Lösungen  $s, t$  der Gleichung

$$g^{i+m_1 s} + g^{j+m_2 t} + 1 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} s = 0, \dots, (p^n - 1)/m_1 - 1 \\ t = 0, \dots, (p^n - 1)/m_2 - 1 \end{array} \right).$$



In zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. **29**, 202 und **30**, 105) hat Verf. in den zwei Spezialfällen  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 m_2 = p^n - 1$  gewisse quadratische Beziehungen zwischen den  $(i, j)_{m_1 m_2}$  aufgestellt, hier gewinnt er entsprechende Resultate für den allgemeinen Fall. Das Verfahren ist kürzer als in den früheren Arbeiten. Für den Fall  $m_1 = m_2$  werden gewisse neue, ähnliche Beziehungen festgestellt. Rédei (Szeged).

**Rédei, L.: Kurzer Beweis eines Satzes von Vandiver über endliche Körper.** Publ. math., Debrecen **1**, 99—100 (1949).

Es sei  $g$  ein erzeugendes Element der Multiplikativgruppe des Galoisfeldes von  $q = 1 + mc$  ( $m > 1$ ) Elementen. Die Anzahl der Lösungen  $r, s = 0, \dots, c-1$  der Gleichung  $1 + g^{i+rm} = g^{j+sm}$  werde mit  $(i, j)$  bezeichnet. Für  $A_{hk} = \sum_{i,j=0}^{m-1} (i, j) (i+h, j+k)$  gilt der

Satz von Vandiver (vgl. dies. Zbl. **29**, 202):  $A_{hk} = c^2 + q \bar{h} \bar{k} - c(\bar{h} + \bar{k} + \bar{h} - \bar{k})$ ; dabei ist  $\bar{i} = 1$  oder  $0$ , je nachdem  $m|i$  oder  $m \nmid i$ . Verf. gibt, wie er es schon in seinem Referat (l. c.) angekündigt hatte, für diesen Satz einen überraschend kurzen Beweis. H. L. Schmid (Berlin).

**Botella Raduán, F.: Ein analytisch-geometrischer Beweis des Bezoutschen Satzes in der Ebene.** Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 8, 50—53 (1948) [Spanisch].

### Gruppentheorie:

**Lorenzen, Paul: Über halbgeordnete Gruppen.** Math. Z., Berlin **52**, 483—526 (1949).

Eine halbgeordnete Halbgruppe  $H$  besitzt eine assoziative Multiplikation  $ab$  mit Einheitselement  $1$  und eine reflexive und transitive Halbordnung  $a \leq b$ , die durch die Bedingung verknüpft sind, daß aus  $a \leq b$  und  $c \leq d$  stets  $ac \leq bd$  folgt — man bemerke, daß aus der gleichzeitigen Gültigkeit von  $a \leq b$  und  $b \leq a$  nicht  $a = b$  folgt, sondern nur die Assoziiertheit  $a \equiv b$  der Elemente  $a$  und  $b$ . Existiert auch für irgendzwei Elemente  $a, b$  ihre größte untere Grenze  $a \wedge b$ , so werde von einer Halbverbandshalbgruppe gesprochen. — Ist  $G$  eine halbgeordnete Gruppe, so bilden die ganzen Elemente (d. h. die Elemente  $g$  mit  $1 \leq g$ ) eine invariante Halbhuntergruppe; und Halbordnungen von  $G$  und invariante Halbhuntergruppen von  $G$  bestimmen einander gegenseitig. Halbverbandsguppen sind sogar Verbandsguppen, da  $[a^{-1} \wedge b^{-1}]^{-1}$  die kleinste obere Grenze  $a \vee b$  von  $a$  und  $b$  ist; und in Verbandsguppen gilt das Distributivgesetz:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \equiv a \vee (b \wedge c)$$

(wie auch ein interessanter Verfeinerungssatz für assoziierte Produkte). — Eine Halbordnung werde als Ordnung bezeichnet, wenn stets  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt. Direkte Produkte beliebig vieler geordneter Gruppen werden zu Verbandsguppen, wenn man die Elemente mit ganzen Komponenten ganz sein läßt. Es gilt der wichtige Satz, daß eine Verbandsguppe  $V$  sich dann und nur dann in ein solches direktes Produkt geordneter Gruppen einbetten läßt, wenn aus  $a \wedge (xa x^{-1}) \equiv 1$  für  $a$  und  $x$  in  $V$  stets  $a \equiv 1$  folgt. — Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe  $H$  ist eine minimale Oberhalbverbandshalbgruppe  $J$  von  $H$ . Es gibt dann zwei extreme Idealsysteme von  $H$ : das  $s$ -System, das sich in jedes Idealsystem von  $H$  homomorph abbilden läßt; und das  $v$ -System, auf das sich jedes Idealsystem von  $H$  homomorph abbilden läßt. Ist ein Idealsystem von  $H$  eine Gruppe, so ist es notwendig das  $v$ -System. Für halbgeordnete Gruppen mit ausgezeichnetem Idealsystem wird dann ein verfeinertes Einbettungsproblem gelöst. — Die Resultate werden in einem zweiten Teil auf das Problem angewandt, die Gruppen zu charakterisieren, die eine Ordnung im strengen Sinne besitzen (dieses Problem ist in den letzten Jahren von vielen Autoren behandelt worden: F. Levi, Iwasawa, B. Neumann u. a.). Es wird gezeigt, daß  $G/N$  eine Ordnung besitzt, wenn  $N$  der Durchschnitt aller Normalteiler  $M$  mit ordnungsfähigem  $G/M$  ist; und die Elemente in  $N$  werden durch innere Eigenschaften ( $s$ -Abhängigkeit von  $1$ ) gekennzeichnet. — In der Einleitung werden die Beziehungen zur Idealtheorie sorgfältig analysiert. Reinhold Baer (Urbana).



Clifford, A. H. and D. D. Miller: Semigroups having zeroïd elements. Amer. J. Math. 70, 117—125 (1948).

Les semi-groupes des  $A$  sont des systèmes  $S$  associatifs multiplicativement fermés (ou demi-groupes dans la terminologie de P. Dubreil, Algèbre, tome I, Paris, 1946). Un élément zéroïde  $u$  de  $S$  est un élément divisible à gauche et à droite par tout élément  $a$  de  $S$  ( $ax = ya = u$ ). Dans le semi-groupe multiplicatif d'un anneau, le seul élément zéroïde est le zéro. Dans un semi-groupe quelconque l'ensemble des éléments zéroïdes coïncide avec l'intersection de tous les idéaux de  $S$  (un idéal dans  $S$  est un sous-ensemble  $A$  tel que  $A \cdot S \subset A$  et  $S \cdot A \subset A$ ). Cette intersection, si elle n'est pas vide, constitue un sous-groupe  $\bar{U}$  de  $S$  (théorème 1). L'élément unité  $z$  de  $U$  permet la définition d'un homomorphisme  $\zeta$  de  $S$  sur  $U$  par la relation  $x \rightarrow zx$  ( $= xz$ , car  $z$  est permutable avec tout élément de  $S$ ). Les éléments de  $S$  qui s'appliquent sur  $z$  forment un sous-semi-groupe  $J$  de  $S$  tel que  $J \cap U = z$  (théorème 3). L'union des ensembles  $U$  et  $J$  définit aussi un sous-semi-groupe de  $S$ , appelé la trame de  $S$ . Les  $A$  indiquent une construction de semi-groupes  $S$  ayant une trame donnée; puis ils donnent, avec quelques autres propriétés, la suivante: tout semi-groupe homomorphe à un sous-semi-groupe d'un groupe peut être immergé dans un semi-groupe ayant des éléments zéroïdes.

L. Lesieur (Poitiers).

Federer, Herbert and Bjarni Jónsson: Some properties of free groups. Trans. Amer. math. Soc. 68, 1—27 (1950).

This is an exposition and extension of known results on free groups. In particular Jakob Nielsen's basic methods and results [Mat. Tidsskr. B 1, 77—94 (1921)] are made more accessible, and results of O. Schreier, F. W. Levi, J. H. C. Whitehead and others are derived by a unified method developed from Nielsen's. The following theorems are typical: If Nielsen's reductions are applied at random to  $n$  elements of total length  $q$  (relative to some fixed set of free generators) in a free group, then after at most  $(q+1)(2n)^{2nq}$  steps one arrives at a set of elements which allows no further reduction and generates freely whatever it generates. If  $H$  is a subgroup of a free group  $G$  and if the partial order of the elements of  $H$  according to length is refined to a well-order, then the set of all those elements of  $H$  which are not generated by their predecessors in this well-order generates  $H$  freely. Any free factor of  $G$  contained in  $H$  is also a free factor of  $H$ . If  $G$  is free and finitely generated and if a set of elements of lengths not exceeding  $s$  generates a free factor of  $G$ , then a suitable complementary free factor can also be generated by elements of lengths not exceeding  $s$ . If a homomorphism maps a free group  $G$  onto a free group  $H$ , then it maps a free factor of  $G$  isomorphically onto  $H$ , and a complementary free factor onto the unit element of  $H$ ; these free factors can be chosen so as to contain prescribed free factors of  $G$ , if these satisfy certain trivially necessary conditions.

B. H. Neumann (Manchester).

Neumann, B. H.: On a special class of infinite groups. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 23, 117—127 (1950).

Als Lösung einer Preisfrage beweist Verf. folgenden Satz: Es gibt Gruppen (kurz „Preisfrage-Gruppen“ genannt) mit endlich vielen Erzeugenden, die Abelsche Untergruppen ohne endlich viele Erzeugenden besitzen. Es wird sogar gezeigt, daß sich das direkte Produkt  $A$  von abzählbar unendlich vielen unendlichen zyklischen Gruppen und die (multiplikativ geschriebene) additive Gruppe  $A'$  der rationalen Zahlen mit nur 2-Potenzennennern in Gruppen  $G$  bzw.  $G'$  mit zwei Erzeugenden einbetten lassen. Werden nämlich  $A$  bzw.  $A'$  von den Elementen  $a_j$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) auf Grund der definierenden Relationen  $a_i a_k = a_k a_i$  bzw.  $a_i^2 = a_{i+1}$  erzeugt, so sind  $A$  bzw.  $A'$  in den Gruppen  $G = \{a_0, b\}$  bzw.  $G' = \{a_0, c\}$  mit den weiteren definierenden Relationen  $b^{-k} a_0 b^k = a_k$  bzw.  $c^{-k} a_0 c^k = a_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) offenbar als Untergruppen enthalten. Durch eine sinnvolle Kombination beider



Gruppenkonstruktionen zeigt Verf. noch, daß die Anzahl sämtlicher (nicht-isomorpher) Preisfragegruppen gleich der Mächtigkeit des Kontinuums ist. *Szele.*

**Tartakovskij, V. A.:** Lösung des Identitätsproblems für eine Gruppe mit  $k$ -verkürzbarer Basis für  $k > 6$ . *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **13**, 483—494 (1949) [Russisch].

Verschärfung der Resultate aus der Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **34**, 163).

*R. Kochendörffer* (Rostock).

**Černikov, S. N.:** Über volle Gruppen mit wachsender Zentralreihe. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **70**, 965—968 (1950) [Russisch].

Es werden torsionsfreie Gruppen mit wachsender Zentralreihe betrachtet. Diese haben Normalreihen, deren Faktoren isomorph sind zu Untergruppen der additiven Gruppe der rationalen Zahlen. Derartige Reihen heißen Rationalreihen. Hat eine Rationalreihe die endliche Länge  $n$ , so hat jede Rationalreihe die gleiche Länge.  $n$  heißt Rang der Gruppe. Es wird bewiesen: Dann und nur dann ist eine Gruppe von endlichem Range, wenn dies für mindestens einen maximalen abelschen Normalteiler gilt.

*R. Kochendörffer* (Rostock).

**Szép, J.:** On simple groups. *Publ. math., Debrecen* **1**, 98 (1949).

Verf. gibt folgende Sätze, die kaum eines Beweises bedürfen: 1. Eine einfache Gruppe von endlicher Ordnung kann nur eine Untergruppe vom Index  $i > 1$  enthalten, wenn ihre Ordnung Teiler von  $i!$  ist. 2. Die alternierende Gruppe von der Ordnung  $n!/2$   $n \geq 5$  kann eine Gruppe von Primzahlindex nur dann enthalten, wenn  $n$  eine Primzahl ist. (Anmerkung des Ref.: Hier könnte man schärfer sagen: ... — enthält eine Gruppe von Primzahlindex  $p$  dann und nur dann, wenn  $n = p$  ist.) 3. Wenn eine einfache Gruppe  $\mathcal{G}$  eine Untergruppe vom Index  $p$  enthält, wobei  $p$  Primzahl ist, so folgt, daß  $p$  der maximale Primteiler der Ordnung von  $\mathcal{G}$  ist und die Ordnung von  $\mathcal{G}$  ihn nur in der ersten Potenz enthält. Korollar: Wenn eine einfache Gruppe  $\mathcal{G}$  eine Untergruppe  $\mathcal{H}$  vom Primzahlindex  $p$  enthält, so ist  $\mathcal{G} = \mathfrak{P} \mathcal{H}$ , wobei  $\mathfrak{P}$  eine beliebige der  $p$ -Sylowgruppen der Ordnung  $p$  von  $\mathcal{G}$  ist. *Grün.*

**Szele, T.:** Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. *Publ. math., Debrecen* **1**, 89—91 (1949).

The following theorem is proved: The ring of endomorphisms of an abelian group with at least one element ( $\neq 0$ ) of finite order possesses no proper zero divisors, if and only if the group is either cyclic of prime order  $p$ , or locally cyclic of Prüfer's type  $p^\infty$ . The ring of endomorphisms is then the prime field of characteristic  $p$ , or the ring of  $p$ -adic integers respectively; in any case it is commutative. — The corresponding problem for locally infinite (= torsion-free) abelian groups is proposed. Clearly the additive group of rationals and its subgroups are of the kind considered, but e.g. the existence of direct indecomposable abelian groups of rank 2 indicates that the problem may be very difficult. *B. H. Neumann.*

**Taussky, Olga and John Todd:** Covering theorems for groups. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **21**, 303—305 (1949).

Ist  $G$  eine abelsche Gruppe mit  $n$  Basiselementen der Ordnung  $p$  —  $p$  ist nicht notwendig Primzahl — und  $S$  die Teilmenge der  $s = n(p-1) + 1$  verschiedenen Potenzen der Basiselemente, so werden die folgenden Fragen aufgeworfen: 1. nach der kleinsten Zahl  $\sigma(n, p)$ , zu der es eine Teilmenge  $H$  von  $G$  mit  $\sigma$  Elementen und  $G = HS$  gibt, 2. nach den Fällen, bei denen  $H$  als Untergruppe gewählt werden kann. Beantwortung der Fragen nur in einfachsten Spezialfällen. — Es ist immer  $n^p$  als  $p^n$  zu lesen. *Ulm* (Münster).

**Hasse, Helmut:** Zur Frage der Zerfällungskörper des Gruppenrings einer endlichen Gruppe. *Math. Nachr.*, Berlin **3**, 4—6 (1950).

Der Gruppenring  $G$  einer endlichen Gruppe  $\mathcal{G}$  über dem Körper  $P_g$  der  $g$ -ten Einheitswurzeln ist bekanntlich die direkte Summe ebenso vieler zentraler einfacher Algebren  $G_i$  über  $P_g$ , wie es Klassen konjugierter Elemente in  $\mathcal{G}$  gibt. I. Schur



hat vermutet, daß  $P_g$  gemeinsamer Zerfällungskörper aller  $G_i$  ist. Verf. hat früher bewiesen, daß wenigstens  $P_g^{(h)} = P_{g^{n+1}}$  für hinreichend großes  $h$  gemeinsamer Zerfällungskörper aller  $G_i$  ist. Später hat R. Brauer die Schursche Vermutung bewiesen und auch festgestellt, daß man hier  $P_g$  durch den Körper der  $n$ -ten Einheitswurzeln ersetzen kann, wo  $n$  das kleinste gemeinsame Vielfache aller Elementordnungen von  $\mathfrak{G}$  ist. Verf. bemerkt nun, daß es eine Lücke in seinem früheren Beweis gibt und beweist den folgenden Hilfssatz, der den Fehler beseitigt und auch ein selbständiges Interesse hat: Der  $p$ -Grad von  $P_g^{(h)}/P_g$  hat für hinreichend hohes  $h$  die Gestalt  $n_p^{(h)} = g^h/l_p$  mit von  $h$  unabhängigem  $l_p$ . *Bergström* (Göteborg).

**Hasse, Helmut: Verallgemeinerung des Dualitätssatzes für die Charaktere endlicher abelscher Gruppen auf beliebige endliche Gruppen.** Math. Nachr. Berlin 3, 1—3 (1950).

Eine endliche abelsche Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist bekanntlich zu ihrer Charaktergruppe  $X$ , und daher auch zu der Charaktergruppe von  $X$  isomorph. Ein Isomorphismus zwischen der letzteren Gruppe und  $\mathfrak{G}$  läßt sich in gruppeninvarianter Form angeben und kommt als eine Dualität zwischen den Elementen von  $\mathfrak{G}$  und  $X$  zum Ausdruck. Diese Aussage kann wesentlich folgendermaßen ausgesprochen werden: Ist  $a_x$  ein dem Charakter  $\chi$  von  $\mathfrak{G}$  zugeordnetes System von Zahlen mit der Eigenschaft  $a_x a_y = a_{xy}$ , so ist entweder durchweg  $a_x = 0$ , oder aber es existiert ein Element  $S$  aus  $\mathfrak{G}$  derart, daß durchweg  $a_x = a_x(S)$  ist. Verf. verallgemeinert diesen Satz auf beliebige endliche Gruppen  $\mathfrak{G}$  in der folgenden Form: Ist  $A_x$  ein den einfachen Charakteren  $\chi$  von  $\mathfrak{G}$  zugeordnetes System von quadratischen Matrizen mit der Eigenschaft  $A_x \times A_y = P_{x,y}^{-1} A_{xy} P_{x,y}$ , wo  $A_{xy} = \Delta_{\xi} (l_{x,y}^{\xi} \times A_{\xi})$ , so ist entweder durchweg  $A_x = 0$ , oder aber es existiert ein Element  $S$  aus  $\mathfrak{G}$  derart, daß  $A_x = C_x(S)$ . Hier bedeutet  $C_x(S)$  die  $S$  zugeordnete Matrix aus einem Vertretersystem  $\Gamma_x$  der zu  $\chi$  gehörigen absolut irreduziblen Darstellung von  $\mathfrak{G}$  und  $l_{x,y}^{\xi}$  und  $P_{x,y}$  sind durch das Multiplikationsschema der irreduziblen Darstellungen festgelegt.  $\Delta_{\xi}$  bezeichnet die diagonale Zusammensetzung. *Bergström* (Göteborg).

**Tits, J.: Généralisations des groupes projectifs.** Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 35, 224—233 (1949).

L'A. continue son article (voir ce Zbl. 34, 305) sur les généralisations des groupes projectifs. Dans cette deuxième note, il caractérise les groupes projectifs dans l'ensemble des groupes triplement transitifs en indiquant des propriétés équivalentes entr'elles. Il donne plusieurs théorèmes de ce genre, p. ex. le suivant: Pour qu'un groupe triplement transitif soit projectif, il faut et il suffit que deux couples quelconques déterminent une involution. *Kárteszi* (Budapest).

**Leray, Jean: Espace où opère un groupe de Lie compact.** C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1545—1547 (1949).

Soit  $X$  un espace localement compact sur lequel opère un groupe de Lie compact  $G$ . On sait que l'algèbre d'homologie  $H^*(G)$  sur les réels de  $G$ , munie du produit de Pontrjagin, est une algèbre extérieure sur l'espace de ses éléments primitifs; elle est en dualité avec l'algèbre de cohomologie  $H(G)$  de  $G$ , munie du cup-produit (Théorème de Hopf-Samelson). Partant de ce fait et de l'application  $(g, x) \rightarrow g(x)$  de  $G \times X$  dans  $X$ , l'A. fait correspondre à tout  $h^* \in H^*(G)$  une application linéaire de  $H(X)$  en lui-même, qui est une différentielle si  $h^*$  est primitif, le produit intérieur gauche par  $h^*$  si  $X = G$ . Ces transformations linéaires forment une algèbre isomorphe à  $H^*(G)$ . — Soit  $Y$  un espace homogène de  $G$  et  $\xi$  la projection de  $G$  sur  $Y$ . À l'aide de ces différentielles, l'A. retrouve le théorème de Samelson disant que  $\xi^{-1}H(Y)$  est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de  $H(G)$  et montre que  $H(Y) \cong \xi^{-1}H(Y) \otimes H''$ , où  $H''$  est l'ensemble des zéros de certaines différentielles.

*A. Borel* (Paris).



**Leray, Jean:** Application continue commutant avec les éléments d'un groupe de Lie compact. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1784—1786 (1949).

Soit  $X$  un espace fibré localement compact et localement trivial de fibre  $F$  et de base  $Y$ ,  $\xi$  la projection de  $X$  sur  $Y$ . L'A. indique ce que donne, appliquée à ce cas particulier, sa théorie de l'anneau spectral d'une application continue [Leray, J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **29**, 1—139 (1950), Nos 50 à 61]. [ $f_Y$ , resp.  $f_F$  désigne la filtration  $l = 0$ ,  $m = 1$  resp.  $l = -1$ ,  $m = 0$ ; la simplification essentielle ici vient de ce que en général  $H_{m+1} = H(Y) \otimes H(F)$ ]. Soit  $G$  un groupe de Lie compact de transformations de  $X$  et  $Y$ , commutant avec  $\xi$ ; l'A. étend la définition des différentielles de  $H(X)$  et  $H(Y)$  (cf. rapport précédent) de manière à les faire opérer sur l'anneau spectral de  $\xi$ . Il applique cela au cas où  $Y$  est espace homogène de  $X = G$ , énonçant entre autres pour chaque terme de l'anneau spectral une formule analogue à la dernière du rapport précédent. Si  $G$  opère trivialement sur  $Y$ , l'A. introduit d'autres différentielles agissant sur  $H(X)$  et  $H(\xi^{-1}(y))$ ,  $y \in Y$ .

A. Borel (Paris).

**Wang, Hsien-Chung:** Homogeneous spaces with non vanishing Euler characteristics. Ann. Math., Princeton, II. S. **50**, 925—953 (1949).

L'A. étudie les espaces homogènes  $G/L$  d'un groupe de Lie compact et connexe  $G$ , ayant une caractéristique d'Euler  $\chi(G/L) \neq 0$  [cf. H. Hopf et H. Samelson, Comment. math. Helvetici **13**, 240—251 (1941); ce Zbl. **24**, 237].  $L$  est alors un sous-groupe fermé de  $G$  de même rang que  $G$  (au sens de H. Hopf); si  $G$  opère simplement sur  $G/L$ , ce qu'on supposera dans la suite,  $G$  n'a pas de centre;  $G$  est donc produit de groupes simples (non abéliens)  $G_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $G/L$  est homéomorphe à  $\prod_{i=1}^n G_i/L_i$  avec  $L_i = G_i \cap L$  et on a  $\chi(G/L) = \prod_{i=1}^n \chi(G_i/L_i)$ . On est ainsi ramené à étudier les espaces homogènes de l'espèce précédente ou opèrent des groupes simples; on appelle ces espaces des  $\chi$ -espaces élémentaires. Si on fait abstraction des types exceptionnels, on montre alors que si  $\alpha$  est l'algèbre d'un groupe d'un des types  $A_n, B_n, C_n$  ou  $D_n$  de E. Cartan, la structure d'une sous-algèbre de  $\alpha$  qui contient une sous-algèbre commutative maximale donnée est déterminée à un automorphisme près par une famille d'entiers naturels  $\theta$ , qu'on appelle sa catégorie; si  $\alpha$  est l'algèbre d'un groupe simple  $G$ , à une catégorie  $\theta$  correspond une classe de sous-groupes fermés de même rang que  $G$  dont la structure est déterminée à un isomorphisme local près par  $\theta$ ;  $\theta$  est appelée la catégorie de ces sous-groupes; si  $G$  n'a pas de centre ou bien si  $G$  est simplement connexe, les sous-groupes connexes de  $G$  de catégorie donnée  $\theta$  sont définis à un automorphisme près par  $\theta$ ; en outre, si  $G_0$  est un des groupes  $SU_{n+1}, SO_{2n+1}, Sp_n, SO_{2n}$ , modèles respectifs des types  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ , l'A. indique une construction d'un sous-groupe  $L_0$  de  $G_0$  de catégorie donnée. Un  $\chi$ -espace élémentaire de groupe  $G$  peut être identifié à un espace homogène  $G^*/L$ , où  $G^*$  est le groupe adjoint du type de  $G$  et la catégorie de  $L$  est appelée la catégorie du  $\chi$ -espace. La catégorie d'un  $\chi$ -espace élémentaire  $G_0/L_0$  est alors celle de  $L_0$  et les espaces  $G_0/L_0$  sont ainsi des  $\chi$ -espaces élémentaires simplement connexes de type donné  $A_n, B_n, C_n$  ou  $D_n$  et de catégorie donnée. Tout  $\chi$ -espace élémentaire  $G/L$  a pour revêtement universel  $G_0/L_0$  ou  $G_0$  est le modèle du type de  $G$  et  $L_0$  le sous-groupe de  $G_0$  de même catégorie  $\theta$  que  $L$ ; le groupe fondamental de  $G/L$  est d'ordre fini  $p$  et il est possible de calculer  $\chi(G/L)$  en fonction de  $p$  et de  $\theta$ . L'A. termine en déterminant la structure des cinq premiers groupes d'homotopie des  $\chi$ -espaces élémentaires.

J. Braconnier (Lyon).

**Montgomery, Deane:** Subgroups of locally compact groups. Amer. J. Math. **70**, 327—332 (1948).

L'A. démontre les résultats suivants: soit  $G$  un groupe localement compact, connexe, dont la topologie a une base dénombrable; si  $U$  est un voisinage ouvert de  $e$ , la composante connexe de  $e$  dans  $U$  engendre un sous-groupe partout dense; il en résulte que la réunion des parties  $K$  de  $G$ , compactes, connexes et contenant  $e$



est partout dense et que si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , distinct de  $G$ , et si  $U$  est un voisinage ouvert de  $e$ , il existe un  $K$  non réduit à un point tel que  $K \subset U$  et  $K \not\subset H$ . Si  $G$  est de dimension finie et si  $H$  est un sous-groupe fermé tel que  $\dim H = \dim G$ , alors  $H = G$ .  
Jean Braconnier (Lyon).

**Montgomery, Deane:** Theorems on the topological structure of locally compact groups. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 570—580 (1949).

L'A. améliore ici certains résultats d'un travail précédent (voir la réf. précéd.). Soit  $G$  un groupe localement compact (dont la topologie a une base dénombrable) de dimension  $n > 0$ ; il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $e$  tel que tout cycle (relativement au groupe de base  $T$ ) de dimension  $n$  dans un compact quelconque de  $U$  est un bord; si  $G$  est connexe et non compact, tout cycle de dimension  $n$  dans un compact de  $G$  est un bord; si  $A \subset G$  est fermé et de dimension  $n$ , il existe  $a \in A$  et un voisinage fermé  $V$  de  $a$  tel que la composante connexe de  $a$  dans  $V$  soit contenue dans  $A$ ; en particulier, si  $G$  est localement connexe, l'intérieur de  $A$  n'est pas vide; enfin, si  $U$  est un voisinage fermé de  $e$ , il existe un voisinage fermé  $V \subset U$  de  $e$  tel que tout cycle de dimension  $n-1$  dans  $V$  soit un bord dans  $U$ ; tous ces résultats restent valables pour un espace homogène défini par un sous-groupe fermé quelconque de  $G$ . En remarquant que dans l'espace homogène  $G/H$  défini par un sous-groupe fermé  $H$  d'un groupe localement compact  $G$ , tout compact connexe (resp. de dimension  $r$ ) est image canonique d'un compact connexe (resp. de dimension  $r$ ) de  $G$ , l'A. montre que si  $G$  est de dimension  $n$ , et  $H$  de dimension  $n$ , alors  $\dim(G/H) = 0$  et que si  $\dim H = n-1$  et si  $G/H$  est de dimension finie, alors  $\dim(G/H) = 1$ .

Jean Braconnier (Lyon).

**Mautner, F. I.:** Unitary representations of locally compact groups. I. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 1—25 (1950).

Kapitel I enthält eine ausführliche Darstellung der in einer früheren Note [dies. Zbl. 29, 305] angekündigten Ergebnisse für den Fall abzählbar diskreter Gruppen  $G$ . Kapitel II beschäftigt sich mit den zentralen Zerlegungen der Gruppenalgebra  $W$  einer solchen Gruppe  $G$ .  $L_2(G)$  sei der Hilbertsche Raum aller komplexwertigen  $x(g)$ ,  $g \in G$ , mit  $\sum_g |x(g)|^2 < \infty$ . Dann besteht  $W$  aus allen Operatoren  $A$  auf  $L_2(G)$ , die durch  $Ax(h) = \sum_{g \in G} a(g) x(gh)$  erklärt sind,  $a(g)$  eine  $A$  charakterisierende Funktion aus  $L_2(G)$ . In  $W$  läßt sich durch  $T(A) = a(1)$  eine relative Spur erklären,  $W$  ist eine schwach abgeschlossene selbstadjungierte Operatoralgebra. Das Zentrum  $Z$  von  $W$  besteht aus allen  $A$ , deren  $a(g)$  Klassenfunktionen auf  $G$  sind. Es wird zuerst der Fall betrachtet, daß  $G$  nur aus endlich vielen,  $k$ , Klassen konjugierter Elemente besteht. Dann zerfällt  $W$  in eine direkte Summe  $(1) \sum_1^k W_i$  zentraler einfacher Algebren mit in  $Z$  liegenden Einheitsselementen  $E_i$ . Ist  $U(g)$  die durch  $x(h) \rightarrow x(gh)$  erklärte reguläre Darstellung von  $G$ , so zerfällt  $\mathfrak{H} = L_2(G)$  entsprechend  $(1)$  in  $\sum_1^k \mathfrak{H}_i$  und  $U_i(G) = E_i U(G)$  ist die in  $\mathfrak{H}_i$  induzierte Darstellung. Sie ist nicht mehr wie im Fall einer endlichen Gruppe  $G$  die Wiederholung einer einzigen irreduziblen Darstellung. Die  $U_i$  sind vollständig in  $L_2(G)$ , in dem Sinn, daß für  $a(g) \in L_2(G)$  stets  $\sum_g |a(g)|^2 = \sum_1^k d_j T_j(A_j A_j^*)$  gilt; dabei ist  $d_j = T(E_j)$ ,  $T_j(A) = \frac{1}{d_j} T(A)$  und  $A_j = E_j A = \sum_g a(g) U_j(g)$  im Sinn der schwachen Konvergenz. Durch  $\chi_j(g) = T_j(U_j(g))$  werden Charaktere eingeführt, für die die Orthogonalitätsrelationen  $\sum_h d_i \chi_i(h^{-1}) d_j \chi_j(hg) = \delta_{ij} \chi_i(g)$  gelten. Ist  $G$  die freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, so erhält man aus der Gruppenalgebra  $W$  über  $L_2(G)$  nur unendlichdimensionale irreduzible unitäre Darstellungen, wogegen man im Raum der fastperiodischen Funktionen auf  $G$  nach von Neumann unendlich viele



endlichdimensionale solche Darstellungen erhält. Das Beispiel der Gruppe  $G$  aller linearen Transformationen  $w' = aw + b$ ,  $a \neq 0$ , eines Körpers mit abzählbar vielen Elementen wird ausführlich diskutiert und bewiesen, daß man aus der regulären Darstellung nichtabzählbar viele inäquivalente irreduzible Darstellungen unendlicher Dimension erhält.  $W$  ist im Sinn von von Neumann ein Faktor der Klasse II. Hat  $G$  unendlich viele Klassen konjugierter Elemente, so wird  $W$  ein direktes Integral  $\int_{\oplus} W(t)$  im Sinn von von Neumann von Faktoren endlicher

Klasse  $W(t)$ . Auf fast jedem  $W(t)$  existiert eine Spur  $T_t$ , und es gilt

$$T(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_t(A(t)) ds(t);$$

dabei ist  $A(t)$  die Komponente von  $A$  in  $W(t)$  und  $s(t) = T(E_t)$ ,  $E_t$  die durch  $E_t x = y$  mit  $y(t') = 0$  für  $t' \geq t$ ,  $y(t') = x(t')$  für  $t' < t$  erklärte Projektion in  $L_2(G)$ . Es gilt

$$\text{wieder eine Vollständigkeitsrelation } \sum_g |a(g)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} T_t(A(t)A(t)^*) ds(t).$$

G. Köthe (Mainz).

**Mackey, George W.: Imprimitivité pour les représentations des groupes localement compacts. II. Nombres d'entrelacement pour les représentations imprimitives.** C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 808—809 (1950).

Etant données deux représentations unitaires  $U$  et  $V$  d'un groupe localement compact séparable  $G$ , on appelle nombre d'entrelacement de ces représentations la dimension  $I(U, V)$  de l'espace vectoriel formé par les opérateurs  $T$  tels que  $U_x T = T V_x$  pour tout  $x \in G$ ; ce nombre peut être infini. Dans le but de généraliser la théorie classique de Frobenius, l'A. annonce le théorème suivant. Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes ouverts (donc fermés) de  $G$ ; soient  $L$  et  $M$  deux représentations unitaires de ces sous-groupes,  $U^L$  et  $U^M$  les représentations imprimitives de  $G$  qu'elles engendrent (G. W. Mackey, ce Zbl. **35**, 69); pour  $x, y \in G$ , soit  $I(x, y, L, M)$  le nombre d'entrelacement des représentations  $s \rightarrow L_{x s x^{-1}}$  et  $s \rightarrow M_{y s y^{-1}}$  du sous-groupe  $x^{-1} G_1 x \cap y^{-1} G_2 y$ ; ce nombre ne dépend en réalité que de la classe bilatère  $D = G_1 x y^{-1} G_2$  et on l'écrira donc  $I(D, L, M)$ ; soit  $\delta$  l'ensemble de toutes ces classes bilatères, et soit  $\delta'$  l'ensemble de celles pour lesquelles le sous-groupe  $x^{-1} G_1 x \cap y^{-1} G_2 y$  est d'indice fini dans  $x^{-1} G_1 x$  et dans  $y^{-1} G_2 y$ ; alors on a l'inégalité  $\sum_{D \in \delta'} I(D, L, M) \leq I(U^L, U^M) \leq \sum_{D \in \delta} I(D, L, M)$ , la première partie de cette relation étant une égalité si  $L$  et  $M$  sont de dimension un. L'A. tire de là des critères d'irréductibilité ou d'équivalence pour les représentations imprimitives engendrées par des représentations de dimension un de sous-groupes de  $G$ , et aussi annonce l'existence du phénomène suivant, qui prouve que les groupes discrets infinis ont un comportement quelque peu différent des groupes finis (plus généralement compacts): il existe un (et même probablement une grande quantité!) groupe discret dont on peut décomposer la représentation régulière en somme continue de représentations irréductibles, et ceci de deux façons, de telle sorte qu'aucune composante de la première décomposition ne soit équivalente à une composante de la seconde décomposition.

R. Godement (Nancy).

**Gel'fand, I. M. und M. A. Najmark: Die Spur in den Grund- und Ergänzungsreihen der Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 9—11 (1948) [Russisch].

Cette Note fait suite à trois autres [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **58**, 1577—1580 (1947); et ce Zbl. **29**, 5] dans lesquelles les représentations unitaires irréductibles du groupe complexe unimodulaire (de dimension  $n$ ) ont été décrites; ces représentations se partagent comme on sait en trois classes (séries „fondamentale, supplémentaire et dégénérée“). Dans la présente Note, les A. étudient les opérateurs de composition associés à une représentation appartenant à l'une des deux premières



séries (si  $x \rightarrow U_x$  est une représentation unitaire du groupe  $G$  et si  $f(x)$  est une fonction sommable sur  $G$ , ces opérateurs sont de la forme  $U_f = \int U_x \cdot f(x) dx$ ). Comme dans le cas du groupe de Lorentz étudié précédemment par les A., on peut réaliser facilement ces opérateurs par des noyaux, d'où résulte, d'après les formules obtenues, que pour  $f$ , „convenablement choisie“ l'opérateur  $U_f$  est de trace finie (au sens ordinaire); on en déduit aussi que les représentations irréductibles considérées sont deux à deux distinctes au sens de l'équivalence unitaire (sauf exceptions triviales). — Il serait fort intéressant d'avoir un exposé détaillé des résultats obtenus depuis 1946 par les A., et de voir avec précision comment ces résultats s'étendent aux groupes de Lie semi-simples complexes. *Godement.*

**Gelfand, I. M.:** Das Zentrum eines infinitesimalen Gruppenringes. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 103—112 (1950) [Russisch].

Il est bien connu qu'à toute algèbre de Lie  $L$  on peut associer une algèbre associative „universelle“  $A$ , de dimension évidemment infinie, et qui joue un grand rôle (au moins implicitement: l'opérateur de Casimir lui appartient) dans la théorie des représentations; le but de cet article est d'énoncer quelques propriétés simples du centre de  $A$  (dans toute représentation irréductible, de dimension finie ou non, ce centre conduit à des opérateurs scalaires, d'où son intérêt; de plus, si un groupe de Lie  $G$ , d'algèbre  $L$ , est réalisé comme groupe de transformations d'une variété différentiable, le centre de  $A$  conduit à des opérateurs du type de l'opérateur de Laplace). Soit  $(e_i)$  une base de  $L$ ; tout élément de  $A$  est de la forme  $\alpha \cdot I + \alpha^i e_i + \alpha^{ij} e_{ij} + \dots (\alpha, \alpha^i, \alpha^{ij}, \dots$  nombres réels ou complexes; on emploie la convention d'Einstein), et il est facile de voir à l'aide des relations de commutation qu'on peut supposer les coefficients  $\alpha^{ij}, \alpha^{ijk}, \dots$  symétriques par rapport à leurs indices; la condition pour que l'élément considéré soit dans le centre de  $A$  est alors que les formes multilinéaires symétriques  $\alpha^i x_i, \alpha^{ij} x_i y_j, \alpha^{ijk} x_i y_j z_k, \dots$  soient invariantes par le groupe adjoint. L'A. examine ensuite des cas particuliers—groupe linéaire général et groupe orthogonal; par un calcul explicite peu difficile, on constate alors que le centre de  $A$  est à un nombre fini de générateurs dans chacun de ces cas. — Au lieu d'associer aux éléments de  $A$  des formes multilinéaires, on peut aussi leur associer de façon évidente des polynômes par rapport aux coordonnées d'un élément variable du dual de l'espace vectoriel  $L$ ; le centre de  $A$  correspond ici encore aux polynômes invariants par le groupe adjoint. L'A. applique le résultat obtenu au cas du groupe linéaire général, ce qui naturellement le conduit à étudier les représentations tensorielles de ce groupe. — Les résultats de cet article sont évidemment peu profonds; en particulier, l'A. semble ignorer (ou du moins semblait ignorer en 1948, date de rédaction de l'article!) que, si  $L$  est semi-simple, le centre de  $A$  possède un nombre fini de générateurs (ce qui résulte des théorèmes classiques sur les invariants); mais il est clair que les notions exposées ici sont fondamentales, comme on le sait depuis l'article bien connu de Casimir et van der Waerden [il y aurait aussi lieu de citer l'article de V. Bargmann sur le groupe hyperbolique: Ann. Math., Princeton, II. S. 48, 586—640 (1947)].

*R. Godement (Nancy).*

**Krejn, M.:** Das Dualitätsprinzip für eine bikompakte Gruppe und eine quadratische Block-Algebra. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 725—728 (1949) [Russisch].

Soit  $A$  une algèbre commutative sur le corps complexe, munie d'une involution  $x \rightarrow x$  et d'un élément unité  $e$ ; on dit que  $A$  est une algèbre de blocs quadratiques si  $A$  possède une base (au sens algébrique) dont les éléments peuvent être partagés en blocs  $(u_{ij}^{(v)}) = U_v$  ( $1 \leq i, j \leq n_v$ ) de telle sorte que soient vérifiées les conditions suivantes: a) l'un de ces blocs est réduit à  $(e)$ ; b) si la base contient un bloc  $U = (u_{ij})$  elle contient aussi le bloc  $U = (\bar{u}_{ij})$  et on a en outre  $UU^* = (\delta_{ij}e)$  où  $U^*$  est la transposée de  $\bar{U}$  et où  $\delta_{ij}$  a la signification usuelle; c) si  $U, V$  sont deux blocs de la



base, leur produit tensoriel  $U \otimes V$  peut être mis, au moyen d'une matrice unitaire (complexe), sous forme d'une somme directe d'autres blocs; d) si de plus  $U = \bar{V}$ , la décomposition de  $U \otimes V$  fait intervenir exactement une fois le bloc (e); e) si enfin  $U \neq \bar{V}$ , aucun des blocs composant  $U \otimes V$  n'est réduit à (e). — Une exemple évident de telle algèbre est formé par les „polynômes trigonométriques“ sur un groupe compact  $G$  (le produit étant la multiplication ordinaire, et la base étant obtenue en choisissant, dans chaque classe de représentation irréductible de  $G$ , une réalisation matricielle de cette classe); l'A. démontre que l'on obtient par ce procédé toutes les algèbres de blocs quadratiques; la démonstration est ingénieuse, et redonne une démonstration de plus du théorème de dualité de Tannaka.

*R. Godement (Nancy).*

### Verbände. Ringe. Körper:

● Littlewood, D. E.: The skeleton key of mathematics: a simple account of complex algebraic theories. (Hutchinson's University Library No. 18.) London: Hutchinson's University Library 1949. 138 p.; 7 s. 6d. net.

Das vorliegende Buch gibt eine erstaunlich reichhaltige Einführung in die Gedankenwelt der modernen Algebra. Beginnend mit dem Zahlbegriff, dem Euklidischen Algorithmus, Kettenbrüchen, Kongruenzen, dem quadratischen Reziprozitätsgesetz, werden dann die Grundbegriffe der Algebra auseinandergesetzt, Polynom-bereich, Körperbegriff (algebraische Zahlkörper,  $p$ -adische Zahlen), Idealbegriff und seine Bedeutung für algebraische Zahlkörper. Es schließt sich die Galoissche Theorie an, die am Beispiel der Gleichungen 3. und 4. Grades durchgeführt wird mit geometrischen Anwendungen, z. B. auf das Siebzehneck. Nach einer Erörterung der Hauptprobleme der hyperkomplexen Systeme, speziell am Beispiel der Gruppenalgebra, behandelt der letzte Teil ziemlich eingehend die Bestimmung aller Darstellungen der symmetrischen Gruppe nach Young und Schur und wendet diese Theorie zur Bestimmung aller linear unabhängigen Tensoren und Invarianten einer bestimmten Stufe an. Nicht alles wird ausführlich bewiesen. Die Hauptgedanken werden jedoch stets an durchgerechneten Beispielen präzise auseinandergesetzt.

*G. Köthe (Mainz).*

Dilworth, R. P. and Morgan Ward: Note on a paper by C. E. Rickart. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1141 (1949).

Die Sätze 1 und 3 einer Arbeit von C. E. Rickart (dies. Zbl. 32, 250) über Boolesche Ringe bzw. distributive Verbände sind einfache Folgen eines allgemeinen Satzes der Verbandstheorie.

*G. Köthe (Mainz).*

Blumenthal, L. M. and D. O. Ellis: Notes on lattices. Duke math. J. 16, 585—590 (1949).

$L$  denotes a normed lattice,  $|x|$  the norm of the element  $x$ . The distance  $(a, b)$  of two elements  $a$  and  $b$  is defined  $= |a + b| - |ab|$ ; the resulting metric space is denoted by  $D(L)$ . The study of relations between lattice properties of  $L$  and metric properties of  $D(L)$  was begun by V. Glivenko [Amer. J. Math. 58, 799—828 (1936) and 59, 941—956 (1937); this Zbl. 15, 243 and 17, 339]. He showed that the metric relation  $(B)$ :  $(a, b) + (b, c) = (a, c)$  is equivalent to the lattice relation  $(G)$ :  $ab + bc = b = (a + b)(b + c)$ . In the paper under review two relations  $(G')$  and  $(G'')$  are given, each equivalent to  $(G)$  in modular (Dedekind) lattices and therefore in normed lattices. M. F. Smiley and W. R. Transue [Bull. Amer. math. Soc. 49, 280—287 (1943)] showed that a sufficient condition for four distinct points  $a, b, c, d$  of  $D(L)$  to form a pseudo-linear quadruple is that they form a sub-lattice of  $L$ ; the present authors prove: A necessary condition for four distinct points to form a pseudo-linear quadruple is that the labelling can be so chosen that  $(N)$ :  $a + c = b + d, ac = bd$ . The preceding condition is also sufficient if  $L$  is distributive; in the general case a necessary and sufficient condition is that



with a suitable labelling (*NS*):  $a + c = b + d$ ,  $a = (a + b)(a + d)$ ,  $b = (b + c)(b + a)$ ,  $c = (c + d)(c + b)$ ,  $d = (d + a)(d + c)$ . Simple counter-examples illuminate the limitations in some of the previous propositions. The importance of the role of pseudo-linear quadruples in questions of euclidean imbedding appears on the following theorems:  $D(L)$  is congruent with an euclidean subset if and only if it is congruent with a subset of a straight line.  $D(L)$  is congruent with a subset of a straight line if and only if it contains no pseudo-linear quadruple. Therefore:  $D(L)$  is congruent with an euclidean subset if and only if  $L$  is simply ordered. A one-to-one mapping of  $L$  onto a normed lattice  $L'$  is said to have property ( $M$ ) if it preserves order, property ( $D$ ) if it preserves distances, property ( $N$ ) if it preserves norms (modulo a constant). The following implications are established:  $((M) + (N)) \rightarrow (D)$ ,  $((M) + (D)) \rightarrow (N)$ ,  $((N) + (D)) \rightarrow (M)$ . Chr. Pauc (Cape Town).

**Krishnan, Viakalathur S.:** L'extension d'un  $(<, \cdot)$  algèbre à une  $(\Sigma^{-k}, \cdot)$  algèbre. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1447—1448 (1950).

Jede teilweise geordnete Menge mit monotoner Verknüpfung, d. h.  $a < b \rightarrow ac < bc \wedge ca < cb$  läßt sich durch Ideale zu einem distributiven Halbverband erweitern, d. h.

$$(\Sigma a_i) \cdot c = \Sigma a_i c, \quad c(\Sigma a_i) = \Sigma c a_i.$$

Es wird die freie Erweiterung konstruiert, die (bis auf Isomorphie) dadurch gekennzeichnet ist, daß sie sich in jede andere solche Erweiterung homomorph abbilden läßt. Lorenzen (Bonn).

**Raffin, Raymond:** Anneaux à puissances commutatives et anneaux flexibles. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 804—806 (1950).

Verf. betrachtet nichtassoziative Ringe und untersucht den Zusammenhang zwischen Ringen von speziellen Typen, in denen die Assoziativität durch eine schwächere Forderung ersetzt wird. Er beweist, daß in jedem Ring mit der Gleichung  $(xy)x = x(yx)$  für jedes Elementenpaar  $x, y$  („flexible ring“ im Sinne von A. A. Albert, dies. Zbl. **33**, 154) die Hauptpotenzen jedes Elementes  $x$  kommutieren, d. h.  $x^p x^q = x^q x^p$  für alle natürlichen Zahlen und jedes Element  $x$ . Hat der Ring unter derselben Voraussetzung eine zu 2 prime Charakteristik, so sind auch alle (gemischten) Potenzen für jedes Element vertauschbar, und ist jeder durch  $n$  untereinander kommutative Elemente erzeugte Unterring kommutativ. L. Fuchs.

**Schwarz, Ludwig:** Zur Theorie des nichtkommutativen Polynombereichs und Quotientenrings. Math. Ann., Berlin **120**, 275—296 (1948).

Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring mit Einselement 1, der einen Schiefkörper enthält. Verf. konstruiert einen Ring  $\mathfrak{R}$  mit den folgenden Eigenschaften: (1)  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ , und 1 ist ebenfalls das Einselement von  $\mathfrak{R}$ , (2) es gibt Elemente  $x_a$ , die  $\mathfrak{R}$  über  $\mathfrak{R}$  erzeugen, und jedem  $x_a$  ist ein Schiefkörper  $\mathfrak{Q}_a$  in  $\mathfrak{R}$  als Vertauschungskörper zugeordnet, (3) die selbstverständliche Summenzerlegung  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \sum_a \mathfrak{R} x_a \mathfrak{R}$  ist direkt, (4) sind  $a_i$  in  $\mathfrak{R}$  bei  $\mathfrak{Q}_a$ -Rechtsmultiplikation linear unabhängig, so ist  $F_a = \sum_i a_i x_a F_i$  ( $F$  in  $\mathfrak{R}$ ) dann und nur dann 0, wenn alle  $F_i = 0$  sind. Ein solcher Ring  $\mathfrak{R}$  heißt ein Polynombereich der Unbestimmten  $x_a$  mit den Vertauschungskörpern  $\mathfrak{Q}_a$  über  $\mathfrak{R}$ . Ein wichtiger Fall ist, wenn alle  $\mathfrak{Q}_a$  gleich dem Primkörper  $\mathfrak{P}$  in  $\mathfrak{R}$  sind. Zwecks Konstruktion des Polynombereichs  $\mathfrak{R}$  erweitert Verf. die multiplikative Halbgruppe  $\mathfrak{R}_m$  von  $\mathfrak{R}$  durch Hinzunahme der  $x_a$  zu einer multiplikativen Halbgruppe  $\mathfrak{R}_m$  (deren Elemente bekanntlich die aus Elementen von  $\mathfrak{R}$  und den  $x_a$  gebildeten Worte sind) und bildet den Halbgruppenring  $\mathfrak{r}$  von  $\mathfrak{R}_m$  (ähnlich wie der gewöhnliche Gruppenring konstruiert ist) mit  $\mathfrak{P}$  als Koeffizientenkörper. Es besteht nun eine Homomorphie des ähnlich gebildeten Halbgruppenrings  $\mathfrak{f}$  von  $\mathfrak{R}_m$  auf  $\mathfrak{R}$ ; deren Kern sei das Ideal  $\mathfrak{c}$ . Dann ist der Restklassenring  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{r}/\mathfrak{c}$  von  $\mathfrak{r}$  nach dem Erweiterungsideal  $\mathfrak{c}$  von  $\mathfrak{c}$  ein Polynombereich über  $\mathfrak{f}/\mathfrak{c} = \mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{P}$



als gemeinsamem Vertauschungskörper. Durch Erweiterung der Vertauschungskörper zu den  $\mathfrak{L}_a$  gewinnt man den allgemeinen Polynombereich  $\mathfrak{R}$  mit beliebigen Vertauschungskörpern. Es wird bewiesen, daß  $\mathfrak{R}$  die oben genannten Eigenschaften (1)–(4) besitzt und möglichst allgemein in dem Sinne ist, daß jeder Oberring  $\mathfrak{R}^*$  von  $\mathfrak{R}$  mit den die Forderungen (1) und (2) erfüllenden  $x_a^*$  ein homomorphes Abbild von  $\mathfrak{R}$  ist; diese Homomorphie läßt  $\mathfrak{R}$  elementweise fest und bildet  $x_a$  auf  $x_a^*$  ab. Nach einer naheliegenden Definition des Begriffes des Grades eines Polynoms beweist Verf., daß  $\mathfrak{R}$  nullteilerfrei ist, wenn  $\mathfrak{R}$  ebenfalls diese Eigenschaft besitzt. Ist der Grundring  $\mathfrak{R}$  ein Schiefkörper, so spielt in  $\mathfrak{R}$  der Euklidische Algorithmus eine wesentliche Rolle. Um von den Polynomen über einem Schiefkörper die gebrochenen rationalen Funktionen zu erreichen, adjungiert man zu  $\mathfrak{R}$  alle Inversen von Elementen aus  $\mathfrak{R}$  und erhält den vollen Quotientenring  $\mathfrak{Q}$  von  $\mathfrak{R}$ . Die Existenz von  $\mathfrak{Q}$  wird bewiesen, aber Verf. läßt es offen, ob  $\mathfrak{Q}$  ein Schiefkörper und eindeutig bestimmt ist.

*L. Fuchs* (Budapest).

**Kaplansky, Irving:** Topological representation of algebras. II. Trans. Amer. math. Soc. 68, 62–75 (1950).

Die vorliegende Arbeit setzt frühere Untersuchungen fort [R. Arens und I. Kaplansky; dies. Zbl. 32, 7]. Zu den dort betrachteten verschiedenen Arten von regulären Ringen treten hier noch die  $\pi$ -regulären Ringe: Ein Ring  $A$  heißt  $\pi$ -regulär nach McCoy, wenn zu jedem  $a \in A$  ein  $x$  und eine ganze Zahl  $n(a)$  existiert mit  $a^n x a^n = a^n$ . In jedem  $\pi$ -regulären Ring enthält jedes nichtnil-Rechtsideal ein Idempotent  $\neq 0$ . Ein solcher Ring enthält entweder eine unendliche Anzahl orthogonaler Idempotente oder erfüllt die absteigende Kettenbedingung modulo dem Radikal. Ist in einem  $\pi$ -regulären Ring  $A$  die Ordnung der nilpotenten Elemente durch die Zahl  $n$  beschränkt, so ist  $A/P$ ,  $P$  ein primitives Ideal in  $A$ , ein höchstens  $n$ -reihiger Matrizenring über einem Divisionsring.  $A$  heißt homogen, wenn  $A$  halbeinfach ist und  $A/P$  stets ein genau  $n$ -reihiger Matrizenring über einem Divisionsring ist. Ein homogener  $\pi$ -regulärer Ring  $A$  mit Einheit ist Matrizenring über einem stark regulären Ring. Der Strukturraum von  $A$  ist stets lokalkompakt und null-dimensional. Ist  $A$  ein homogener,  $\pi$ -regulärer Ring mit dem Zentrum  $Z$ , so ist  $A/AZ$  ein Nilring,  $AZ$  regulär und biregulär. Hat  $AZ$  ein abzählbares Erzeugendensystem, so ist  $AZ$  wieder Matrizenring über einem stark regulären Ring. Die Abzählbarkeitsvoraussetzung ist unentbehrlich. Ist  $A$  eine algebraische Algebra über einem Körper  $F$ , mit Einheit und ohne nilpotente Elemente,  $A/M$  für jedes zweiseitige maximale Ideal  $M$  genau von der Ordnung  $n^2$  über seinem Zentrum, so ist  $A$  direkte Summe endlich vieler Algebren, deren jede das über einem geeigneten Erweiterungskörper von  $F$  gebildete Kroneckersche Produkt einer kommutativen Algebra und einer zentralen Divisionsalgebra der Ordnung  $n^2$  ist. Auf ein Problem von A. Kurosch wird eine teilweise Antwort gegeben: Jede algebraische Algebra, die eine Polynomidentität erfüllt, ist lokal finit, d. h. jede endlich erzeugte Teilalgebra ist endlichdimensional. Die Arbeit schließt mit dem Satz: Erfüllt ein halbeinfacher Ring die absteigende Kettenbedingung für Rechtshauptideale, so ist er direkte Summe einfacher Ringe mit Minimalidealen. *G. Köthe* (Mainz).

**Motzkin, Th.:** The euclidean algorithm. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1142–1146 (1949).

Vorgelegt ist ein Integritätsbereich  $Q$ . Eine Teilmenge  $P$  von  $Q - 0$  ( $Q$  außer 0) mit  $P(Q - 0) \subseteq P$  wird ein Produktideal genannt. Als Totalderivierte  $B$  einer Teilmenge  $S$  von  $Q$  wird die Menge aller  $b$  definiert, für die  $S$  mindestens eine Restklasse  $a + bQ$  von  $Q$  mod  $b$  enthält. Der Durchschnitt  $S' = S \cap B$  wird die Derivierte von  $S$  genannt. Es gilt die Monotonie:  $S'_1 \subseteq S'$  ( $S_1 \subseteq S$ ). Mit  $S$  zusammen ist auch  $S'$  ein Produktideal. — Ist in  $Q - 0$  eine Norm  $|a|$  als eine nicht-negative ganzzahlige Funktion definiert mit  $|b| \leq |a|$  ( $b|a$ ) und der weiteren Eigenschaft, daß es für  $b \nmid a$  Elemente  $q, r$  mit  $a = bq + r$ ,  $|r| < |b|$  gibt, so wird



gesagt, daß (in  $Q$ ) der E. A. (= Eukl. Alg.) (für diese Norm) existiert. Bezeichne dann  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) das Produktideal, bestehend aus den  $b \in Q$  mit  $|b| \geq i$ . Es gilt  $P'_i \subseteq P_{i+1}$ , denn für jedes  $b \in P'_i$  gibt es ein  $a$  mit  $a + bQ \subseteq P_i$ , woraus für  $a = qb + r$  ( $|r| < |b|$ ) notwendig  $r \in P'_i$ ,  $|b| \geq i + 1$  folgt. Umgekehrt für jede Folge  $Q - 0 = P_0 \supseteq P_1 \supseteq \dots$  von Produktidealen mit  $P'_i \subseteq P_{i+1}$  und leerem Durchschnitt  $\cap P_i$  und für  $|a| = i$  ( $a \in P_i - P_{i+1}$ ) existiert der E. A., somit besteht eine eindeutige Korrespondenz zwischen den E. A. und den Folgen dieser Art. Ein anderer E. A. wird stärker genannt als der vorige, wenn ihm eine Folge  $\bar{P}_i \subseteq P_i$  zugehört. Gibt es einen E. A., so gibt es auch einen stärksten, definiert durch die Folge  $P_0, P'_0, P''_0, \dots$ , also ist  $\cap P^{(i)}_0 = 0$  notwendig und hinreichend, damit ein E. A. existiert. Eine zulässige Folge  $P_i$  geht in eine ebensolche  $P_0, \dots, P_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}'_i, \bar{P}''_i, \dots$  über, wenn  $P_i$  ein Produktideal ist mit  $P_{i-1} \supseteq \bar{P}_i \supseteq \bar{P}'_{i-1}$ . Als Verallgemeinerung wird auch der transfinite E. A. (= tea) definiert, dieser entsteht mit der Modifizierung aus dem E. A., daß man für  $|a|$  beliebige Ordnungszahlen zuläßt und auf  $|a| \geq |b|$  ( $b|a$ ) verzichtet. Auch dann gelten ähnliche Sätze, insbesondere gilt aber: Für die Existenz eines tea ist notwendig und hinreichend, daß ein  $P^{(A)}_0$  leer ist. Es folgen Beispiele und einige Ausführungen über verwandte Algorithmen. Rédei (Szeged).

Neumann, B. H.: On ordered division rings. Trans. Amer. math. Soc. 66, 202—252 (1949).

Diese Arbeit ist dem Beweis der folgenden beiden Sätze gewidmet: 1. Jede geordnete Gruppe ist Untergruppe der Multiplikationsgruppe eines geordneten (nicht notwendig kommutativen) Körpers, der aus formellen Potenzreihen besteht — die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind einem vorgegebenen (nicht notwendig kommutativen) Körper entnommen, während die „Exponenten“ Elemente der gegebenen geordneten Gruppe sind. 2. Jeder geordnete (nicht notwendig kommutative) Körper ist in einem geordneten Körper enthalten, dessen Zentrum einen zum Körper aller reellen Zahlen ordnungsisomorphen Körper enthält. Der Beweis beruht auf einer systematischen Analyse der Möglichkeiten, Zentrumselemente zu einem geordneten Körper zu adjungieren. Reinhold Baer (Urbana, Illinois).

Manises Lechuguero, Julio: Neue Erläuterungen über ordenbare Körper mit einem einzigen Automorphismus. Euclides, Madrid 9, 426—427 (1949) [Spanisch].

Verf. erweitert einen von P. Abellanas aufgestellten Satz über ordenbare Körper (dies. Zbl. 33, 350) in folgender Art: Ist  $C$  die von allen ordenbaren Körpern, die dem quadratischen Postulat und dem Postulat von Archimedes genügen, gebildete Klasse,  $C'$  die Klasse der ordenbaren Körper, die dem quadratischen Postulat genügen,  $C''$  die Klasse der ordenbaren Archimedischen Körper, so gilt: (1) Alle Körper von  $C$  haben einen einzigen Automorphismus. (2) In  $C'$  und  $C''$  gibt es Körper mit mehr als einem Automorphismus. — Verf. führt Beispiele an. Holzer.

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

Chatland, H.: On the Euclidean algorithm in quadratic number fields. Bull. Amer. math. Soc. 55, 948—953 (1949).

Davenport [Auszug im Bull. Amer. math. Soc. 54, 662 (1948)] bewies, daß im quadratischen Zahlkörper  $R(\sqrt{D})$  ( $D$  quadratfrei, ganz) mit  $D > 128^2$  kein E. A. (= Euklidischer Algorithmus) existiert. Andererseits waren seit längerem nur noch die Primzahlen  $D = p \equiv 1 \pmod{24}$  kritisch. Verf. überprüft hiervon die Fälle  $601 < p < 128^2$  und stellt fest, daß dann kein E. A. existiert. Da die restlichen Fälle  $p \leq 601$  K. Inkeri (dies. Zbl. 29, 201) untersucht hat, so ist hierdurch das berühmte Problem des E. A. für  $R(\sqrt{D})$  abgeschlossen, und zwar existiert der E. A. genau in den 22 Fällen:  $D = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, 97$ . Rédei (Szeged).



David, Marcel: Sur un algorithme voisin de celui de Jacobi. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 965—967 (1949).

Der Jacobische Algorithmus ordnet jedem Punkt  $\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$  des reellen dreidimensionalen projektiven Raumes eine Punktfolge  $\xi_\nu : \eta_\nu : \zeta_\nu$  dieses Raumes auf Grund der folgenden Rekursionsformeln zu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_\nu - a_\nu \zeta_\nu = \eta_{\nu+1} \\ \eta_\nu - b_\nu \zeta_\nu = \xi_{\nu+1} \\ \zeta_\nu - \xi_{\nu+1} \end{array} \right\} \text{ mit } a_\nu = \left[ \frac{\xi_\nu}{\zeta_\nu} \right], b_\nu = \left[ \frac{\eta_\nu}{\zeta_\nu} \right],$$

wo  $[x]$  das größte Ganze unter  $x$  bedeutet. Während bekannt ist, daß aus der schließlichen Periodizität dieses Algorithmus folgt, daß  $\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$  die Verhältnisse linear-unabhängiger Zahlen eines reellen kubischen Zahlkörpers  $K$  sind — der Algorithmus liefert dann in geläufiger Weise eine nicht-triviale Einheit von  $K$  —, steht bisher nicht fest, ob umgekehrt jedes derartige Verhältnissystem zu einem schließlich periodischen Jacobischen Algorithmus und damit zur Bestimmung einer nicht-trivialen Einheit des betr. Körpers  $K$  führt. Verf. ändert nun den Jacobischen Algorithmus dadurch ab, daß er die erste Formel jedes Tripels durch  $\xi_\nu - a_\nu \zeta_\nu = \eta_{\nu+1}$  mit  $\bar{a}_\nu = \langle \xi_\nu / \zeta_\nu \rangle$  ersetzt, wo  $\langle x \rangle$  das kleinste Ganze über  $x$  bedeutet. Er zeigt dann durch einfache Abschätzungen, daß bei diesem modifizierten Algorithmus in jedem total-reellen kubischen Zahlkörper  $K$  Gegenbeispiele  $\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$  gegen die schließliche Periodizität existieren (sogar mit beliebig vorgeschriebenem  $\xi_0 : \zeta_0$ ).

Hasse (Berlin).

Hasse, Helmut: Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1948, Nr. 2, 95 S. (1950).

Verf. hat in einer anderen Arbeit eine Methode entwickelt, durch welche man die Klassenzahl  $h$  für abelsche Zahlkörper  $K$  aus der bekannten analytischen Klassenzahlformel arithmetisch bestimmen kann. Dazu sind im wesentlichen die folgenden beiden Aufgaben im größten reellen Teilkörper  $K_0$  von  $K$  zu lösen: I. Bestimmung eines Grundeinheitensystems von  $K_0$ . II. Bestimmung der Höhe des Kreiseinheitensystems von  $K_0$  über diesem Grundeinheitensystem. In dieser Arbeit werden nun diese beiden Aufgaben für die zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörper gelöst und die Klassenzahl berechnet. Der Arbeit sind Tafeln von Grundeinheit und Klassenzahl für diese Zahlkörper mit Führern bis zu 100 beigegeben, die nach dem entwickelten Verfahren berechnet sind. Bezüglich des zyklischen kubischen Zahlkörpers  $K - K_0$  wird zunächst eine Ganzheitsbasis konstruiert, die durch klassenkörpertheoretische Invarianten (Führer  $f$  der Klassengruppe, erzeugenden Charakter  $\chi$  und die  $\chi$  zugeordnete Gaußsche Summe) bestimmt ist. Diese Ganzheitsbasis spielt eine entscheidende Rolle. Es wird zahlengeometrisch bewiesen, daß es eine wesentlich eindeutig bestimmte arithmetisch ausgezeichnete Grundeinheit  $E$  gibt, die bis auf die Unterscheidung von ihren Konjugierten als eine Minimallösung einer ternären diophantischen Gleichung charakterisiert ist. Zur Bildung von Kreiseinheiten in einem abelschen Zahlkörper  $K$  mit der zugeordneten Kongruenzgruppe  $H$  vom Führer  $f$  wird allgemein das Produkt  $\theta = \prod_a \Delta_{2f}(a)$  mit  $\Delta_{2f}(x) = 2i \sin \pi x f$ ,  $a$  ein Halbsystem mod  $f$ , benutzt. Im zyklischen kubischen Zahlkörper  $K$  ist der Quotient  $H = \theta' / \theta$ ,  $\theta'$  konjugiert zu  $\theta$ , eine Einheit, sog. Kreiseinheit von  $K$ . Die Klassenzahl  $h$  ist gleich der Höhe  $[H : E]$ , d. h. gleich dem Index der durch  $H$  und seine Konjugierten erzeugten Untergruppe in der durch  $E$  und seine Konjugierten erzeugten Untergruppe. Verf. benutzt eine Produktformel des Ref., um die Koordinaten von  $\theta$  und  $\theta'$  und somit auch diejenigen von  $H$  in bezug auf die Ganzheitsbasis zu bestimmen. Danach kann die Höhe durch ein Rekursionsverfahren bestimmt werden. — Die Berechnung der Klassenzahl von biquadra-



tischen zyklischen Körpern wird in entsprechender Weise durchgeführt. Hier ist aber  $K$  Relativkörper über den quadratischen Teilkörper  $\eta$ . Es gibt eine wesentlich eindeutig bestimmte Relativgrundeinheit aus  $K$ , deren Norm in bezug auf  $\eta$  gleich  $\pm 1$  ist und die durch eine Minimaleigenschaft festgelegt ist. Wenn  $h_0$  die Klassenzahl von  $\eta$  ist, so ist die Klassenzahl  $h$  von  $K$  gleich  $h_0 h^*$ , wo  $h^*$  ganz ist und Relativklassenzahl genannt wird. Hier kann  $h^*$  nach den genannten Methoden arithmetisch bestimmt werden. Die Arbeit ist sehr reich an interessanten einzelnen Ergebnissen, die hier nicht erwähnt werden können. Bergström (Uppsala).

**Waerden, B. L. van der: Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern.** Comment. math. Helvetici 20, 68—80 (1947).

Es sei  $K$  ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 und Geschlecht  $g$  über einem vollkommenen Konstantenkörper  $\Omega$ . Mittels einer singularitätenfreien homogenen Erzeugung  $K = \Omega(x_0 : \dots : x_n)$  mit  $n \geq 2g$ , wobei die  $x_0 : \dots : x_n$  einem homogenen algebraischen Gleichungssystem genügen, seien Koordinaten für die Punkte von  $K$  eingeführt. Ref. [Jber. Deutsche Math.-Verein. 52, 1—48 (1942); dies. Zbl. 28, 341] hatte, gestützt auf eine solche Erzeugung, den Körper  $K$  der Abelschen Funktionen zu  $K$  definiert, nämlich als den Koordinatenkörper  $K = \Omega(\mathfrak{X})$  einer allgemeinen  $g$ -gliedrigen Punktgruppe  $\mathfrak{X}$  von  $K$ , und hatte zwei Behauptungen darüber ausgesprochen, wie sich die Operationen der „Translation“ und der „Multiplikation“ in der Nullklassengruppe (Divisorenklassengruppe nullten Grades) von  $K$  in die arithmetische Theorie von  $K$  einordnen. Verf. beweist hier diese beiden Behauptungen, indem er die vom Ref. entwickelte arithmetische Theorie von  $K$  durch Heranziehung der Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie unterbaut und insbesondere weitgehenden Gebrauch von der Theorie der Korrespondenzen und dem Prinzip der relationstreuen Spezialisierung in algebraischen Mannigfaltigkeiten macht. Nachdem er im ersten Teil eine Übersicht über die grundlegenden Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie gegeben hat, die als eine Art Lehrgang in der algebraischen Geometrie für Algebraiker gedacht ist — für die Beweise verweist er auf sein Buch, seine Arbeiten und Arbeiten von Chow —, beweist er auf dieser Grundlage im zweiten Teil zunächst nochmals die Existenz einer singularitätenfreien Erzeugung der angegebenen Art und entwickelt den darauf gestützten Koordinatenbegriff für Punkte und Punktgruppen. Bei den letzteren bedient er sich, formal einfacher als Ref. l. c., der von Chow eingeführten Koordinaten, die mittels der zugeordneten Form definiert sind. Sodann beweist er, daß die  $g$ -gliedrigen Punktgruppen (kurz Punktgruppen schlechthin) von  $K$  im Koordinatenraum eine algebraische Mannigfaltigkeit mit lauter einfachen Punkten bilden. Indem er die Äquivalenz von Punktgruppenquotienten durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten darstellt, folgert er die Richtigkeit der ersten Behauptung des Ref. in der folgenden Gestalt: I. Seien  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}'$  feste und  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}'$  allgemeine Punktgruppen von  $K$ , durch die Translation  $\mathfrak{X} \mathfrak{D} \sim \mathfrak{X}' \mathfrak{D}'$  verbunden. Ist dann  $\mathfrak{P}$  eine beliebige und  $\mathfrak{P}'$  eine derartige Punktgruppe von  $K$ , daß  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$  eine Fortsetzung der relationstreuen Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  ist, so besteht die Relation  $\mathfrak{P} \mathfrak{D} \sim \mathfrak{P}' \mathfrak{D}'$ . Besteht umgekehrt diese Relation und ist  $\mathfrak{P}'$  regulär ( $\dim \mathfrak{P}' = 1$ ), so wird die relationstreu Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  eindeutig durch  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{P}'$  fortgesetzt. — Verf. beweist weiter, daß die Nullklassen von  $K$  auf Grund ihrer Darstellung durch Punktgruppenquotienten ein irreduzibles algebraisches System von algebraischen Mannigfaltigkeiten, die Klassenmannigfaltigkeit von  $K$  bilden. Indem er die Anwendung eines Multiplikators  $\mu$  von  $K$  (Korrespondenz von  $K$  zu sich) auf die Nullklassengruppe von  $K$  wieder durch algebraische Gleichungen in den Koordinaten ausdrückt, erbringt er den Beweis für die Richtigkeit der zweiten Behauptung des Ref. in der folgenden Form: II. Seien  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{A}$  feste Punktgruppen,  $\mathfrak{Y}$  eine allgemeine Punktgruppe von  $K$  und  $\mathfrak{X}$  durch die Multiplikation



$\mathfrak{X}/\mathfrak{D} \sim_{\mu} \mathfrak{Y}/\mathfrak{A}$  definiert. Dann bleibt diese Beziehung bei jeder relationstreuen Spezialisierung  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$  erhalten. Jede relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  läßt sich durch  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Q}$  fortsetzen, wobei dann die Relation  $\mathfrak{P}'/\mathfrak{Q} \sim_{\mu} \mathfrak{Q}/\mathfrak{A}$  besteht. Jede relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Q}$  läßt sich durch  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  fortsetzen; ist dabei  $\mathfrak{P}$  regulär, so ist  $\mathfrak{P}$  durch jene Relation eindeutig bestimmt. — Schließlich drückt Verf. diese Ergebnisse auch als Theorie der Lösungen der Gleichung  $X = \mu Y$  in der Klassenmannigfaltigkeit aus, wobei  $\mu$  als regulärer Multiplikator (auch  $\mathfrak{X}$  allgemein) vorausgesetzt ist. Dann hat jene Gleichung bei allgemeiner Nullklasse  $X$  genau  $n(\mu)$  Lösungen  $Y$ , wo  $n(\mu)$  der reduzierte Grad von  $\Omega(\mathfrak{Y})$  über  $\Omega(\mathfrak{X})$  ist. Dasselbe gilt dann auch bei jeder Spezialisierung.

Hasse (Berlin).

Northcott, D. G.: A further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 502—509, 510—518 (1949).

Es sei  $K$  ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad  $d$  über dem Körper aller algebraischen Zahlen als Konstantenkörper und  $x_0: \dots: x_n$  ein homogenes Erzeugendensystem von  $K$  derart, daß die durch es gelieferte algebraische Mannigfaltigkeit  $V$  im  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $\mathfrak{R}_n$  singularitätenfrei ist. Für einen Punkt  $p$  von  $V$  mit den Koordinaten  $\xi_0: \dots: \xi_n$ , die im endlich-algebraischen Zahlkörper  $K$  vom Grade  $r_K$  liegen mögen, betrachtet Verf. den Ausdruck

$$C(p) = \sqrt[r_K]{N_K(|\xi_0| + \dots + |\xi_n|)/N_K(\xi_0, \dots, \xi_n)},$$

wo die Norm  $N_K$  formal als das Produkt über die  $r_K$  Konjugierten von  $K$  verstanden ist und das Nennerargument den größten gemeinsamen Teiler als Divisor von  $K$  bedeutet. Der Radikand ist das, was man gewöhnlich als die Höhe von  $p$  bezeichnet,

wobei allerdings im Zähler meist schärfer  $\max_{v=0, \dots, n} |\xi_v|$  statt  $\sum_{v=0}^n |\xi_v|$  gesetzt wird; vgl.

etwa die Arbeit des Ref.: Jber. Deutsche Math.-Verein. 52, 1—48 (1942); dies. Zbl. 28, 341. Der Übergang von dieser Höhe zu ihrer  $r_K$ -ten Wurzel bewirkt, daß die Bildung  $C(p)$  unabhängig von der Wahl des  $\xi_0: \dots: \xi_n$  enthaltenden Zahlkörpers  $K$  wird. Verf. nennt  $C(p)$  die Komplexität von  $p$ ; er beweist zunächst, daß es nur endlich viele Punkte  $p$  mit  $r_K$  und  $C(p)$  unter festen Schranken gibt. — Sei nun weiter  $z_0: \dots: z_m$  ein homogenes Elementensystem aus  $K$  derart, daß die Verhältnisse  $z_0(p): \dots: z_m(p)$  für jeden Punkt  $p$  von  $V$  bestimmt ausfallen und somit eindeutig einen Punkt  $f(p)$  im  $\mathfrak{R}_m$  definieren; Verf. redet in diesem Sinne von einer regulären Abbildung von  $V$  in den  $\mathfrak{R}_m$ . Unter den Divisoren von  $V$  seien diejenigen Divisoren vom Transzendenzgrad  $d-1$  von  $K$  verstanden, die man nach dem bekannten arithmetisch-bewertungstheoretischen Schema (vgl. Ref. 1. c.) erhält, wenn man von einer aus  $x_0: \dots: x_n$  ausgewählten homogenen Transzendenzbasis  $x_0: \dots: x_d$  und den zugehörigen Primpolynomen ausgeht. Bei der regulären Abbildung  $f$  hat man  $z_0: \dots: z_m \cong \beta_0: \dots: \beta_m$  mit ganzen teilerfremden Divisoren  $\beta_0, \dots, \beta_m$  aus einer festen Divisorenklasse  $Z$  von  $V$ . Verf. betrachtet nun diejenigen ganze Divisoren enthaltenden Divisorenklassen  $Z_e$  von  $V$ , die aus  $Z$  durch Abspaltung einer rationalen Form  $q_e$  vom Grade  $e$  in  $x_0: \dots: x_n$  hervorgehen, so daß also  $Z = q_e Z_e$  ist. Für jedes ganze  $e$  gibt es höchstens eine solche Klasse  $Z_e$ . Ist sie vorhanden, so wird  $e$  ein Index von  $f$  genannt, und wenn  $e \geq 0$  ist, ein Exponent von  $f$ ; solche gibt es nur endlich viele. Mittels der Distributivtheorie von A. Weil beweist Verf. dann als Hauptresultat seiner Untersuchungen für jede reguläre Abbildung  $f$  von  $V$  und jeden Exponenten von  $f$  die obere Abschätzung der Komplexität:

$$(1) \quad C(p)^e \leq E C(f(p)),$$

gültig für alle Punkte  $p$  von  $V$ , die nicht zu dem Restmannigfaltigkeitenkomplex der allen ganzen Divisoren aus  $Z_e$  gemeinsamen Punkte von  $V$  gehören, mit einer



nur von  $V$  und  $f$  abhängigen positiven Konstanten  $E$ . Zur Vorbereitung des Beweises wird die Weilsche Distributionenlehre nochmals skizziert und durch eine hier benötigte Regel über die Bildung des größten gemeinsamen Teilers ergänzt.— Existiert ein Exponent  $e = N$  von  $f$  derart, daß  $Z_e$  die Hauptklasse ist, so nennt Verf. die Abbildung  $f$  vollständig regulär und  $N$  ihren Grad. Für diesen Fall beweist er in Verschärfung von (1) die beiderseitige Abschätzung der Komplexität:

$$A \leq C(p)^N / C(f(p)) \leq B,$$

gültig für alle Punkte  $p$  von  $V$  ohne Ausnahme, mit nur von  $V$  und  $f$  abhängigen positiven Konstanten  $A, B$ . — Schließlich wendet Verf. diese Ergebnisse auf den Spezialfall an, daß  $K$  ein elliptischer Funktionenkörper und  $V$  eine Erzeugung durch eine doppelpunktfreie kubische Kurve ist, und erhält so diejenigen Höhenabschätzungen bei  $N$ -Multiplikation und Addition, die zum Beweis des A. Weilschen Endlichkeitssatzes über die Basis der rationalen Punktgruppen für diesen Spezialfall führen; vgl. hierzu übrigens schon die sachlich und methodisch ganz ähnliche Darstellung dieses Beweises durch Ref.: Math. Z., Berlin 48, 48—66 (1942); dies. Zbl. 28, 343.

Hasse (Berlin).

**Northcott, D. G.:** The values taken by a rational function on an algebraic variety. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 675—677 (1949).

Zum besseren Verständnis seiner vorsteh. referierten Arbeit entwickelt Verf. einige in die Grundlegung der algebraischen Geometrie bzw. arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper gehörige Tatsachen über die Einsetzung von Punkten in Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit, und zwar in Gegenüberstellung der divisorientheoretischen Begründung und der Begründung nach dem Prinzip der relationstreuen Spezialisierung.

Hasse (Berlin).

## Zahlentheorie:

**Jarden, Dov:** Recurring sequences. Math. Student, Madras 16, 28—30 (1949).

Verf. definiert die rekurrente Folge  $(W)$  von der Ordnung  $s (\geq 2)$  durch

$$W_n = a_s W_{n-1} + \dots + a_1 W_{n-s} \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

für komplexe  $a_1 (\neq 0), a_2, \dots, a_s, W_0, \dots, W_{s-1}$ , und zieht auch den Spezialfall  $(U)$  mit  $U_0 = \dots = U_{s-2} = 0, U_{s-1} = 1$  in Betracht. Durch Induktion entsteht

$$W_{m+n} = a_1 W_{n-1} U_n + \sum_{\mu+v=s-2} W_{m+\mu} U_{n+1+v} - \sum_{\sigma \geq 0} a_{s-\sigma} \sum_{\mu+v=s-\sigma-3} W_{m+\mu} U_{n+1+v}$$

mit  $\mu, v \geq 0$ . Insbesondere für  $W = U, m = (k-1)n + r$  folgt hieraus

$U_{kn+r} = a_1 U_{(k-1)n+r-1} U_n + A_1 U_{n+1} + \dots + A_{s-2} U_{n+s-2} + U_{(k-1)n+r} U_{n+s-1}$  mit ganzzahligen Polynomen  $A$  der  $a$  und  $U$ . Dies ergibt

$$U_{2n+r} = B_1^{(r)} U_{n+1} + \dots + B_{s-2}^{(r)} U_{n+s-2} \quad (s \geq 4; r = 2, \dots, s-2)$$

mit ganzzahligen Polynomen  $B$  der  $a$  und  $U$ . — Jetzt seien die  $a$  und  $W_0, \dots, W_{s-1}$  ganz rational. Dann sind es auch alle  $W_n, a_1^n W_{-n} (n \geq 0)$ . Für ganze  $P, Q, p$  mit  $p|P, p|Q$  wird  $p|P, Q$  gesetzt ( $p$  Primzahl). Aus diesen Formeln und der Periodizität von  $(U) \bmod p$  folgt: Für jedes  $p (> 0)$  gibt es ein  $n (> 0)$  mit  $p|U_n, \dots, U_{n+s-2}$ . Gilt letzteres, so gilt auch  $p|U_{kn+2}, \dots, U_{kn+s-2} (k = 0, \pm 1, \dots)$ . Für  $s \geq 4$  und  $p|U_{n+1}, \dots, U_{n+s-2}$  gilt  $p|U_{2n+2}, \dots, U_{2n+s-2}$ . Für  $p|W_m, U_n, \dots, U_{n+s-2}$  gilt auch  $p|W_{m-n}$ . Verf. nennt das kleinste  $n (> 0)$  mit  $p|U_n, \dots, U_{n+s-2}$  den Rang des Erscheinens von  $p$  in  $(U)$ . Dann gilt  $p|U_N, \dots, U_{N+s-2}$  nur für  $n|N$ , ferner gilt  $n|P$ , wobei  $P$  die Länge der Periode von  $(U) \bmod p$  ist. (In Zeile 14 der Arbeit soll  $a_s, a_{s-1}$  für  $a_{s-1}, a_{s-2}$  stehen.)

Rédei (Szeged).

• **Wijdenes, P.:** Einführung in die Zahlentheorie.— 2. Aufl., geh. 8,25 f.; geb. 10,50 f. [Holländisch].

Gloden, A.: Résolution de la congruence  $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p^3}$  avec une table. Euclides, Madrid 10, 74 (1950).

Moessner, Alfred: Verschiedene zahlentheoretische Untersuchungen und diophantische Probleme. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 147—152 (1948).

Verf. gibt ohne Beweis: Besteht in  $a_j \perp b_j$  der linke und rechte dreidimensionale Gitterpunktvektor aus lauter Dreieckszahlen, so ist  $\sqrt{8a_j + 1} \perp \sqrt{8b_j + 1}$ . Sind bei sonst gleichen Voraussetzungen in  $a_j \cong b_j$  die Vektoren fünfdimensional, so gilt  $\sqrt{8a_j + 1} \perp \sqrt{8b_j + 1}$  (ideale Lösung). Weiter gibt Verf. verschiedene partikuläre Lösungen des diophantischen Systems (1)  $A + 2B = C + 2D = X^2$ ,  $AB^2 = CD^2 = Y^2$ , auch von (2)  $K + 2R^2 = T + 2W^2$ ,  $K^3 + 2R^6 = T^3 + 2W^6$ . Zuletzt gibt er Lösungen eines diophantischen Systems mit vierzehn Unbekannten, wo außer den Relationen (1) noch  $A, B, B, E_1, \dots, E_5 \stackrel{5}{=} D, D, C, F_1, \dots, F_5$  erfüllt sind.  
Holzer (Graz).

Patz, Wilhelm: Über die Gleichung  $X^2 - DY^2 = \pm c \cdot (2^{31} - 1)$ , wo  $c$  möglichst klein. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer Akad. Wiss. München 1948, 21—30 (1949).

Perron, Oskar: Ein Beweis für die Primalität der Zahl  $2^{31} - 1 = 2147\,483\,647$ . S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 223—226 (1949).

In der zweiten Arbeit wird bewiesen, daß  $p = 2^{31} - 1$  eine Primzahl ist. Der Beweis stützt sich auf die quadratische Darstellung

$$(1) \quad p = 46162^2 + 3 \cdot 2349^2,$$

welche ebenso wie die nachfolgenden numerischen Identitäten der Arbeit leicht kontrollierbar sind. — (1) selbst nebst

$$(2) \quad 2p = 64557^2 + 5 \cdot 5047^2, \quad (3) \quad -p = 179721^2 - 13 \cdot 51476^2$$

sind das Resultat der ersten Arbeit. Dem Verf. der ersten Arbeit hat Perron die Aufgabe gestellt, Identitäten von der Form (1)—(3) aufzufinden. Er kam dazu in kurzer Zeit mit einem Verfahren, das an Kettenbruchalgorithmen erinnert, die Ausarbeitung ist aber lückenhaft, weshalb nicht klar ist, wie Verf. zu den richtigen Darstellungen (1)—(3) gekommen ist. Die Arbeit ist mit einer einleitenden „Vorbemerkung“ von Perron versehen, die einige Anleitungen zum Verständnis des Patzschen Verfahrens gibt.  
Rédei (Szeged).

Swift, J. D.: Diophantine equations connected with the cubic Fermat equation. Amer. math. Monthly 56, 254—256 (1949).

Aus (1)  $x^3 + y^3 = z^3$  entsteht durch die Substitution  $x + y = a$ ,  $xy = b$  die in rationalen Zahlen (nicht trivial) lösbare Gleichung (2)  $a^3 - z^3 = 3ab$ . Verf. gibt leicht die allgemeinen Formeln für die rationalen Lösungen von (2) an. Z. B.

$$(3) \quad a = q^2 n^3, \quad b = 3mq(q^2 n^4 - 3q n^2 m + 3m^2), \quad z = q^2 n^3 - 3m n q.$$

Da für rationale  $a, b, z$  ( $abz \neq 0$ ) in (2) wegen der Unlösbarkeit von (1)  $a^2 - 4b = r^2$  nicht rational lösbar sein kann, so liefert die Einsetzung von (3) eine nur trivial lösbare Gleichung. Insbesondere für  $m = n = 1$  entsteht so die nur trivial lösbare Gleichung  $q(q^3 - 12q^2 + 36q - 36) = r^2$ . Aus den rationalen Lösungen von (2) entstehen auch im wesentlichen alle Lösungen von (1) in quadratischen Zahlkörpern durch die Substitution  $x, y = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$ . Rédei (Szeged).

Palamà, Giuseppe: Somme uguali di biquadrati. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 417—422 (1949).

Verf. wendet die klassische Methode von Fermat zur Lösung der diophantischen Gleichungen

$$(1) \quad x_1^4 + \dots + x_n^4 = y_1^4 + \dots + y_m^4, \quad n \geq 2, \quad m \geq 3$$



an. Er findet unter anderem folgende Identität: Ist  $d = n_3^4 + \dots + n_k^4$  ( $k \geq 3$ ), so ist:

$$[m^4(m^8 - 1) - 2d]^4 + [m(m^8 + 2d - 1)]^4 + \sum_{j=3}^k [2m(m^8 - 1)n_j]^4 \\ = [m(m^8 - 2d - 1)]^4 + [m^4(m^8 - 1) + 2d]^4.$$

Mit  $m = n = k + 1$  in (1) führt er das Problem auf die Lösung einer quadratischen diophantischen Gleichung mit  $k + 2$  Unbekannten zurück. Er gibt dazu verschiedene spezielle Formeln, die aber den zur Verfügung stehenden Raum übersteigen würden.

Holzer (Graz).

**Whiteman, Albert Leon:** Theorems on quadratic residues. Math. Mag., Texas 23, 71—74 (1949).

Verf. beweist durch elementare Umformungen die Äquivalenz der folgenden drei Ungleichungen, wovon die erste die berühmte Folgerung aus der Klassenzahlformel von Dirichlet ist:

$$(1) \sum_{n=1}^{p'} \left( \frac{n}{p} \right) > 0, \quad (2) \sum_{n=1}^{p-1} \cotg \frac{n^2 \pi}{p} > 0, \quad (3) \sum_{n=1}^{p'} \left[ \frac{n^2}{p} \right] > \frac{(p-1)(p-5)}{24},$$

wobei  $p$  eine Primzahl mit  $4|p+1$ ,  $p' = (p-1)/2$ ,  $(n/p)$  das Symbol von Legendre,  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$  bezeichnet. (Für  $4|p-1$  gehen (1), (2), (3) in ähnliche Gleichungen über.) Vollständigkeitshalber wird auch der im wesentlichen von Kai-Lai Chung (dies. Zbl. 27, 156) stammende Beweis von (1) mittels Fourierreihen reproduziert.

Rédei (Szeged).

**Fairecloth, O. B. and H. S. Vandiver:** On multiplicative properties of a generalized Jacobi-Cauchy cyclotomic sum. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 260—267 (1950).

Verff. betrachten in einem endlichen Körper  $K$  mit  $q$  Elementen die Charaktersummen

$$\pi(\chi_1, \dots, \chi_s) = \sum_{x_1 + \dots + x_s = 1} \chi_1(x_1) \cdots \chi_s(x_s)$$

zu einer beliebigen Anzahl  $s$  von multiplikativen Charakteren  $\chi_i \neq 1$  von  $K$  [mit der Zusatzdefinition  $\chi_i(0) = 0$ ]; die  $x_i$  sollen in  $K$  laufen. In Verallgemeinerung des hinlänglich bekannten Falles  $s = 2$  [siehe etwa Davenport-Hasse, J. reine angew. Math. 172, 151—182 (1934); dies. Zbl. 10, 338] zeigen Verff. mit den ganz entsprechenden elementaren Summenumformungen, daß auch für beliebige  $s \geq 2$  die folgenden Tatsachen gelten. a) Zusammenhang mit den Gaußschen Summen

$$\tau(\chi) = \sum_x \chi(x) e^{(2\pi i/p) \text{Sp}(x)}$$

in  $K$ . Die  $\pi(\chi_1, \dots, \chi_s)$  mit auch  $\chi_1 \cdots \chi_s \neq 1$  sind das Faktorensystem der  $\tau(\chi_1), \dots, \tau(\chi_s)$ :

$$\pi(\chi_1, \dots, \chi_s) = [\tau(\chi_1) \cdots \tau(\chi_s)] / \tau(\chi_1 \cdots \chi_s);$$

für  $\chi_1 \cdots \chi_s = 1$  ist der Nenner durch  $-q$  zu ersetzen. b) Multiplikative Aufspaltungen, die sich aus dieser Parameterdarstellung ergeben:

$$(1) \pi(\chi_1, \dots, \chi_s) = \begin{cases} \pi(\chi_1, \dots, \chi_t) \pi(\chi_1 \cdots \chi_t, \chi_{t+1}, \dots, \chi_s) & \text{für } \chi_1 \cdots \chi_t \neq 1 \\ -q \pi(\chi_1, \dots, \chi_t) \pi(\chi_{t+1}, \dots, \chi_s) & \text{für } \chi_1 \cdots \chi_t = 1, \end{cases}$$

$$(2) \pi(\chi_1, \dots, \chi_s) = q^k \pi(\chi_1, \chi_2) \pi(\chi_1 \chi_2, \chi_3) \cdots \pi(\chi_1 \cdots \chi_{s-1}, \chi_s),$$

wenn genau  $k$  der Produkte  $\chi_1 \cdots \chi_t = 1$  sind ( $1 < t < s$ ). — Die Bezeichnungsweise der Verff. (Vermeidung des Charakterbegriffs, stattdessen die nicht-invariante Gaußsche Funktion „ind“ für den Exponenten der Darstellung von  $x$  durch ein erzeugendes Element der Multiplikationsgruppe von  $K$ ) ist bei dem heutigen Stande der Einsicht in die formal-algebraische und begriffliche Bedeutung des behandelten

Zusammenhangs als veraltet anzusehen; es wäre zu wünschen, daß Verff. sich in weiteren Arbeiten über diesen Gegenstand die moderne Auffassung und Bezeichnung zu eigen machen.

Hasse (Hamburg).

**Kanold, Hans-Joachim:** Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I. J. reine angew. Math. 187, 169—182 (1950).

Man bezeichne mit  $F_m(x, y) [= y^{(m)} F_m(x/y)]$  das homogenisierte  $m$ -te Kreisteilungspolynom ( $m > 2$ ), bezeichne mit  $p$  den größten Primfaktor von  $m$  und mit  $P$  die größte, in  $m$  enthaltene Potenz von  $p$ . Stets bedeuten  $x, y (\neq 0)$  relativ prime ganze Zahlen. Satz: Für teilerfremde ganze Zahlen  $x, y (\neq 0)$  sind die von  $p$  verschiedenen Primfaktoren von  $F_m(x, y)$  alle  $\equiv 1 \pmod{m}$ , ein solcher kommt immer vor, ausgenommen wenn  $x/y = \pm 1$  oder  $x/y = -2$ ,  $m = 3$  oder  $x/y = 2$ ,  $m = 6$ ; stets gilt  $p^2 \nmid F_m(x, y)$ ;  $p \mid F_m(x, y)$  kann nur für  $p \equiv 1 \pmod{m/P}$ ,  $x^{m/p} \equiv y^{m/p} \pmod{p}$  gelten. Der Beweis ist elementar, man könnte ihn verkürzen. Ist  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, die als Teiler von  $F_m(x, y)$  nach vorigem Satz überhaupt in Frage kommt [d.h. ein Produkt von Primzahlen  $\equiv 1 \pmod{m}$ ] oder das  $p$ -fache davon, so wird auch die Anzahl der Fälle  $n \mid F_m(x, y)$  [ $0 < x < y < n$ ;  $(x, y, n) = 1$ ] bestimmt. Es kommt noch eine Reihe kleinerer Ergänzungen, Beispiele und Anwendungen. (Für die letzteren vgl. aber die Arbeit des Ref.: Über die Anzahl der Potenzreste mod  $p$  im Intervall  $1, \sqrt{p}$ , dies. Zbl. 35, 26.) Rédei.

**Bateman, P. T.:** Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1180—1181 (1949).

The function  $\prod_{d|n} (1 - x^d)^{\mu(n/d)}$  is a polynomial of  $x$ . Denote  $A_n$  the maximum of the absolute values of the coefficients. The au. gives a short proof for the inequality  $A_n < \exp n^{C/\log \log n}$ , where  $C > 0$  is a constant. In the opposite direction the inequality  $A_n > \exp n^{c/\log \log n}$  is valid for infinitely many  $n$  [P. Erdős, Portugaliae Math., to appear in the next number (1950)]. Gál (Paris).

**Kühnel, Ullrich:** Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Z., Berlin 52, 202—211 (1949).

Nach Sylvester muß eine ungerade vollkommene Zahl mindestens 5 verschiedene Primteiler besitzen. Verf. zeigt, daß man hier 5 durch 6 ersetzen darf und daß daher eine etwa vorhandene ungerade vollkommene Zahl  $> 2,2 \cdot 10^{12}$  sein muß. Rohrbach (Mainz).

**Buck, Ellen F. and R. C. Buck:** A note on finitely-additive measures. Amer. J. Math. 69, 413—420 (1947).

Es sei  $\mathcal{D}_0$  die Menge aller Systeme von natürlichen Zahlen, deren jedes — bis auf höchstens endlich viele Elemente — Vereinigung von endlich vielen arithmetischen Progressionen ist, also die kleinste Menge, die alle arithmetischen Progressionen und endlichen Mengen natürlicher Zahlen enthält und gegenüber endlich-oftmaliger Bildung von Vereinigung und Differenz abgeschlossen ist. Jedem  $A \in \mathcal{D}_0$  wird ein Maß (Dichte)  $\Delta(A)$  zugeordnet: Für  $A = \{an + b\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , sei  $\Delta(A) = 1/a$  (natürliche Dichte), ferner  $\Delta(F) = 0$  für jede endliche Menge  $F$ . Ist  $A = A_1 + \dots + A_r$  ( $A_\sigma$  elementfremd für  $\sigma \neq \tau$ ), so sei  $\Delta(A) = \sum_{\sigma=1}^r \Delta(A_\sigma)$ , d.h.  $\Delta(A)$  endlich-additiv. Man gehe durch Erweiterung von  $\Delta$  zu einem äußeren Maß im Sinne von Carathéodory zur abgeschlossenen Hülle (closure)  $\mathcal{D}_0^*$  von  $\mathcal{D}_0$  in bezug auf  $\Delta$  über. Dann gehört eine Menge  $S$  zu  $\mathcal{D}_0^*$  und hat das Maß  $\Delta^*(S)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Mengen  $A, B \in \mathcal{D}_0$  so gibt, daß  $A \subset S \subset B$  und  $\Delta(B - A) < \varepsilon$  ist. Mit anderen Worten: Es ist  $\Delta^*(S) = \inf \Delta(A)$  für alle  $A \in \mathcal{D}_0$ , die  $S$  (bis auf endlich viele Elemente) enthalten. Diesen Dichte-Maßbegriff hat der zweite Verf.



in einer früheren Arbeit [R. C. Buck, Amer. J. Math. **68**, 560—580 (1946)] definiert und untersucht. Jetzt wird gezeigt, daß dieser in einer Gesamtheit von Mengen natürlicher Zahlen definierte Maßbegriff in einem bestimmten Sinn typisch für jedes separable Maß in einem abzählbaren Raum ist. Es sei  $X$  ein solcher Raum und in ihm ein endlich-additives Maß  $\Omega$  auf einer Klasse  $\mathfrak{M}$  von Teilmengen von  $X$ , die gegenüber endlich-oftmaliger Vereinigungs- und Differenzbildung abgeschlossen ist, so definiert, daß das Maß eines Punktes stets 0 und  $\Omega(X) = 1$  ist. Das Maß heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $\mathfrak{M}_0$  von  $\mathfrak{M}$  gibt, für die 1.  $\mathfrak{M}$  die Carathéodorysche Hülle von  $\mathfrak{M}_0$  in bezug auf  $\Omega$  ist; 2.  $\mathfrak{M}_0$  keine unendlichen Mengen vom Maße 0 enthält und 3.  $\Omega(A)$  für jedes  $A \in \mathfrak{M}_0$  rational ist. Dann gilt: Es gibt eine eindeutige Abbildung  $T$  von  $X$  auf die Menge  $N$  aller natürlichen Zahlen derart, daß  $T(\mathfrak{M}_0) \subseteq \mathfrak{D}_0$ ,  $T(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{D}_0^*$  und  $\Omega(A) = \Delta^*(T(A))$  ist für  $A \in \mathfrak{M}$ . Weiter wird eine nichttriviale stetige Abbildung von  $N$  auf das Intervall  $0 < x < 1$  definiert, die dort das Euklidische Längenmaß erzeugt. Hierzu wird eine Topologie eingeführt, indem als Umgebungen die arithmetischen Progressionen festgesetzt werden. Für diese „arithmetische“ Topologie gilt z. B., daß die Menge der Primzahlen nirgends dicht ist, 1 als einzigen Häufungspunkt hat, aber nicht konvergiert, oder daß die Menge der Quadratzahlen abgeschlossen, perfekt und nirgends dicht ist.

Rohrbach (Mainz).

**Alder, Henry L.:** The nonexistence of certain identities in the theory of partitions and compositions. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 712—722 (1948).

Es sei  $q_{d,m}(n)$ , für  $d \geq 1$ ,  $m \geq 1$  ganz, die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in Summanden  $\geq m$ , die sich um mindestens  $d$  unterscheiden. Dann wird im Anschluß an D. H. Lehmer, der den Fall  $m = 1$  betrachtete [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 538—544 (1946)], gezeigt: Abgesehen von den Fällen  $d = 1$ ,  $m$  beliebig oder  $d = 2$ ,  $m = 1, 2$  kann es kein System  $S$  von natürlichen Zahlen so geben, daß  $q_{d,m}(n)$  der Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in Summanden aus  $S$  gleich ist [für  $q_{2,1}(n)$  und  $q_{2,2}(n)$  gibt es bekanntlich—auf Grund der Identitäten von Rogers-Ramanujan—solche Systeme]. Läßt man nur Zerfällungen in verschiedene Summanden von  $S$  zu, so scheidet auch die Möglichkeit  $d = 2$  vollständig aus. — Bezeichnet ferner  $Q_d(n)$  die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in Summanden, die  $\equiv 1$  oder  $d + 2 \pmod{d + 3}$  sind, so vermutet Verf.  $q_{d,m}(n) \geq Q_d(n)$  für alle  $d \geq 1$ ,  $n \geq 1$  (für  $d = 1, 2, 3$  trifft dies bekanntlich zu) und beweist in diesem Zusammenhang: Die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in Summanden, die sich um mindestens  $d$ , im Falle der Teilbarkeit durch  $d$  um mindestens  $2d$  unterscheiden, ist für  $d > 3$  niemals gleich der Anzahl der Zerfällungen von  $n$  aus irgendeinem  $S$ . — Für die entsprechende Anzahl  $c_{d,m}(n)$  der Zergliederungen (Zerfällungen mit Berücksichtigung der Anordnung) von  $n$  gibt es niemals ein  $S$  derart, daß  $c_{d,m}(n)$  mit der Anzahl der Zergliederungen von  $n$  in Summanden aus  $S$  übereinstimmt. Hier gibt es also insbesondere kein Analogon zu den Identitäten von Euler und Rogers-Ramanujan. Die Beweise sind elementar und beruhen auf erzeugenden Funktionen für  $q_{d,m}(n)$  und  $c_{d,m}(n)$ .

Rohrbach (Mainz).

**Čudakov, N. G.:** Über gewisse Potenzreihen, die Primzahlen in den Exponenten enthalten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 445—448 (1949) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung seines früheren Ergebnisses [Ann. Math., Princeton, II. S. **48**, 515—545 (1947)]. Mit Hilfe dieses Resultats erhielt man einen neuen Beweis des Goldbach-Vinogradovschen Satzes. Verf. hofft jetzt, daß er den Goldbach-Waringschen Satz [L. K. Hua, Trudy mat. Inst. Steklov **22** (1947)] durch dieses verallgemeinerte Resultat beweisen können wird. Sei  $f(x) = \sum_{p \geq 2} (\log p) x^{p^k}$ , wo  $k \geq 2$  ganz,  $x = r e^{i\varphi}$  ( $0 \leq r < 1$ ) und die Summe sich auf alle Primzahlen  $p \geq 2$  bezieht. Sei weiter  $q \geq 1$  eine natürliche Zahl,

$q = \exp(2\pi ia/q)$  und  $\psi_e(x) = \varphi(k)^{-1} \Gamma(k^{-1}) (1 - xq^{-1})^{-1/k} \cdot \sum_{(a,q)=1} q^{ak}$ , wo  $a$  ein reduziertes Restsystem (mod  $q$ ) durchläuft. Es sei endlich  $A > 0$  eine willkürliche reelle Zahl und  $\tau = (\log M)^{A_2}$  mit  $A_2 = Ak + 64^k(A+1)$  und  $M = (1-r)^{-1}$ . Satz: Wenn  $|\varphi - 2\pi a/q| \leq \pi(q\tau)^{-1}$ ,  $q \leq \tau$ , dann ist

$$f(x) - \psi_e(x) < c(A, k) M^{1/k} (\log M)^{1+1/k-A}.$$

— Im Fall  $|\varphi - 2\pi a/q| \leq 2\pi M^{-1} (\log M)^{A_2}$ ;  $A_2 = Ak + 64^k(A+1)$  benutzt Verf. dasselbe Verfahren wie im früheren, auf den Fall  $k=1$  bezüglichen Artikel. Diesen Teil des Beweises kann man nur mit Hilfe des früheren Artikels lesen. Wenn für  $|\varphi - 2\pi a/q|$  die entgegengesetzte Ungleichung gilt, muß Verf. die Vinogradovsche Methode benutzen [Trudy mat. Inst. Tbilisi 3 (1937)]. Gál.

Mirsky, L.: On the frequency of pairs of square-free numbers with a given difference. Bull. Amer. math. Soc. 55, 936—939 (1949).

Es sei  $k > 0$  ganz und

$$f(x) = \sum_{n \leq x} |\mu(n) \mu(n+k)|,$$

dann wird folgender Satz bewiesen: Für  $x \rightarrow \infty$  ist

$$f(x) = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) \prod_{p^2|k} \left(1 + \frac{1}{p^2-2}\right) x + O(x^{2/3} \log^{4/3} x),$$

wo der  $O$ -Term von  $k$  abhängen kann. — Dieser Satz stellt für  $r=s=2$  eine Verschärfung eines Satzes des Verf. über Summen von der Form

$$\sum_{n \leq x} \mu_r(n+k_1) \cdots \mu_r(n+k_s)$$

dar (dies. Zbl. 29, 109).

Hlawka (Wien).

Mirsky, L.: Generalization of some results of Evelyn-Linfoot and Page. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 23, 111—116 (1950).

Verf. setzt seine Untersuchungen über einen Satz von Evelyn und Linfoot [Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 305—312 (1948)] fort. Es wird folgendes Problem behandelt: Es seien  $n, q, k, s, r_1, \dots, r_s$  ganze Zahlen mit  $n \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq q$ ,  $s \geq 2$ ,  $2 \leq r_1 \leq \dots \leq r_s$ . Es soll nun eine asymptotische Formel für  $Q(n)$ , der Anzahl der Darstellungen von  $n$  in der Gestalt  $\sum_{i=1}^s n_i r_i$  gefunden werden, wo die  $n_i$   $r_i$ -frei sind ( $i=1, \dots, s$ ) und alle  $n_i \equiv k(q)$  sind. Abgesehen von Ausnahmefällen, wo  $Q(n) = 0$  ist (welche genau angegeben werden), gilt für  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{A}{(s-1)!} \left(\frac{n}{q}\right)^{s-1} S(n) + O(n^{s-2+\tau+\epsilon})$$

$$\text{wo } A, S > 0, \quad \tau = \frac{s(r_s-1) - (r_s-r_1)}{s r_1(r_2-1) - (r_1 r_2 - 2 r_1 + 1)},$$

$\epsilon > 0$  beliebig ist. (Was die genaue Gestalt von  $A$  und  $S$  betrifft, so sei auf die Arbeit verwiesen.) Für  $r_1 = \dots = r_s$  erhält man das Resultat der oben zitierten Arbeit des Verf. Für  $s=2, k=q-1$  erhält man einen Satz von Page (dies. Zbl. 3, 340).

Hlawka (Wien).

Mirsky, L.: A theorem on sets of coprime integers. Amer. math. Monthly 57, 8—14 (1950).

Es seien  $n, s, r$  ganze Zahlen ( $n \geq 1, 2 \leq r \leq s$ ) und  $N_{s,r}(n)$  die Anzahl der Darstellungen (in beliebiger Reihenfolge) von  $n$  als Summe von  $s$  positiven ganzen Zahlen, so daß jedes  $r$ -Tupel von ihnen den g. g. T. 1 hat. Es wird nun das asymptotische Verhalten von  $N_{s,r}(n)$  bei festem  $s, r$  für  $n \rightarrow \infty$  untersucht. Der Fall  $r=s$  ist leicht zu erledigen und liefert

$$N_{s,s}(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right) + O(n^{s-2}).$$



Schwieriger ist der Fall  $2 \leq r < s$ . Setzt man

$$a_k^{(s,r)} = (-1)^{r+k-1} \binom{s}{r+k} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r+k}{i} \quad (0 \leq k \leq s-r),$$

$$X_{s,r}(p) = \sum_{j=0}^t a_j^{(s,r)} p^{t-j} \quad (t = s-r-1),$$

$$S_{s,r}(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{X_{s,r}(p)}{p^{s-1}}\right) \cdot \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{X_{s,r}(p) + a_{t+1}^{(s,r)}}{p^{s-1}}\right),$$

so ist

$$N_{s,r}(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} S_{s,r}(n) + O\left(\frac{n^{s-1}}{\lg^{s-1} n \cdot \lg \lg n}\right),$$

wo der  $O$ -Term höchstens von  $s$  abhängt. Es ist weiter  $C_1 < S_{s,r}(n) < C_2$ , wo  $C_1, C_2$  Konstante sind (die höchstens von  $s$  abhängen). Hlawka (Wien).

Flett, T. M.: On the function  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n}$ . J. London math. Soc. 25, 5—19 (1950).

Es sei  $R(t) = P_1(t) + i Q_1(t) = \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} e^{it/n}$ . Hardy und Littlewood haben  $\Omega$ -Abschätzungen für  $P_1$  und  $Q_1$  gegeben. Verf. zeigt nun für diese Summen die  $O$ -Abschätzungen  $O((\lg t)^{3/4} (\lg \lg t)^{1/2+\varepsilon})$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Unabhängig vom Verf. hat diese Abschätzung auch Vinogradow gegeben (dies. Zbl. 33, 251). Die obige Abschätzung gilt auch für die im Titel genannte Reihe  $Q$ . Beim Beweis des Satzes benutzt der Verf. ein Lemma von van der Corput (dies. Zbl. 18, 108) und eines von Tschudakoff (dies. Zbl. 15, 198 und 21, 11). Zwischen  $R(t)$  und  $\zeta(1+i t)$  besteht bekanntlich ein sehr enger Zusammenhang. Verf. erhält in Verschärfung einer Abschätzung von Titchmarsh

$$\zeta(1+i t) = O\{(\lg t)^{3/4} (\lg \lg t)^{1/2+\varepsilon}\}$$

und

$$\zeta(s) = O\{(\lg t)^{4/5+\varepsilon}\}, \quad \sigma \geq 1 - (\lg t)^{-4/5-\varepsilon}$$

für jedes  $\varepsilon > 0$ . Vorbild für den Beweis ist die Arbeit von Tschudakoff (siehe oben!). Dabei wird aber die Methode an einigen Punkten abgeändert, indem z. B. vom folgenden Lemma ausgegangen wird:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq t^{1/l}} n^{-s} + O(1); \quad \sigma \geq 1 - 2^{-(l+2)}$$

( $l$  bel. ganz  $\geq 1$ ). Dieses Lemma folgt wieder aus einer Abschätzung für

$$\sum_{a \leq n \leq b \leq 2a} n^{-s} \quad (a > 2k, k \geq 2 \text{ ganz}),$$

welches mit Hilfe des van der Corputschen Lemmas gefunden wird.

Hlawka.

Mikolás, Miklós: Farey series and their connection with the prime number problem. I. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 93—117 (1949).

Es sei  $x \geq 1$ ,  $F_x$  die aufsteigende Folge  $k/n$  (Fareyreihe von der Ordnung  $x$ ), für die  $0 < k \leq n \leq x$ ,  $(k, n) = 1$ . Der  $\nu$ -Term in  $F_x$  sei  $q_\nu$ ; die Anzahl ist  $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \varphi(n)$ . Es handelt sich um den Zusammenhang der Riemannschen Vermutung mit den Fareyreihen. Hier ist ja der Satz von Franel wohlbekannt. — Verf. zeigt zunächst, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(q_\nu) \sim \Phi(x) \int_0^1 f(t) dt,$$

wenn entweder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$  existiert oder  $f(t)$  stetig,  $\geq 0$ , monoton abnehmend.

mend für  $0 < t \leq 1$  ist und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 f(t) dt$  vorhanden ist. Besitzt  $f(t)$  eine beschränkte Ableitung in  $[0, 1]$ , so gilt für

$$R_f(x) = \sum_{v=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_v) - \Phi(x) \int_0^1 f(t) dt$$

die Abschätzung  $O(x e^{-c_3 (\lg x)^\gamma})$  ( $1/2 \leq \gamma \leq 11/21$ ,  $c_3 = c_3(\gamma) > 0$ ), gilt die Riemannsche Vermutung (R.V.), so gilt

$$(1) \quad R_f(x) = O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Wann folgt aus (1) die R.V.? Es wird u. a. gezeigt, daß dies der Fall ist, wenn  $f(t)$  ein Polynom 2. Grades ist oder wenn  $f(t)$  bis zur 3. Ordnung stetige Ableitungen in  $[0, 1]$  mit  $f'''(t) \neq 0$  hat und  $|f'(1) - f'(0)| \left| \int_0^1 |f'''(t)| dt \right| > \frac{3\zeta(3)}{2\pi} = 0,574 \dots$  ist.

Hlawka (Wien).

Waerden, B. L. van der: Über Landaus Beweis des Primzahlsatzes. Math. Z., Berlin 52, 649—653 (1950).

Anläßlich einer von E. Landau [Handbuch Primzahlen I, § 65] benutzten Methode, um ein bestmögliches Resultat für das Restglied in der Primzahlformel zu erzielen, erhebt sich folgende Frage. Es soll ein den Bedingungen 1.  $g(\varphi) \geq 0$  für  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ; 2.  $a_k \geq 0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; 3.  $a_0 < a_1$  genügendes Cosinuspolynom  $g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi$  bestimmt werden, derart, daß  $u = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) / (a_1 - a_0)$  möglichst klein wird. Verf. beweist für die untere Grenze  $U$  von  $u$  die Ungleichung  $U > 5,864$ . Kloosterman.

Ramaswami, V.: On the number of positive integers less than  $x$  and free of prime divisors greater than  $x^c$ . Bull. Amer. math. Soc. 55, 1122—1127 (1949).

Es sei  $f(x, c)$  die Anzahl der positiven ganzen Zahlen  $< x$ , die nicht durch Primzahlen  $> x^c$  teilbar sind. Verf. beweist: Es gibt eine für  $c > 0$  definierte und dort positive und stetige Funktion  $\varphi(c)$  derart, daß für jedes feste  $c$  gilt:

$$f(x, c) = x \varphi(c) + O(x/\log x)$$

und zwar für  $c \geq c_0 > 0$  sogar gleichmäßig. Die Funktion  $\varphi$  genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(c_2) - \varphi(c_1) = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(u/(1-u)) u^{-1} du \quad (0 < c_1 < c_2 \leq 1),$$

welche benutzt werden kann zur expliziten Berechnung der Funktion  $\varphi$ . Für  $\frac{1}{2} \leq c \leq 1$  ist  $\varphi(c) = 1 + \log c$ . Aus der (unter Benutzung des Primzahlsatzes leicht zu beweisenden) Formel  $f(x, \frac{1}{2}) = x(1 - \log 2) + o(x/\log x) + G(x)$  mit  $G(x) > kx/\log x$  ( $k > 0$ ) folgt, daß das  $O$ -Glied bestmöglich ist. Kloosterman.

Ramaswami, V.: The number of positive integers  $\leq x$  and free of prime divisors  $> x^c$ , and a problem of S. S. Pillai. Duke math. J. 16, 99—109 (1949).

Verf. beweist folgenden Satz: Es sei  $f(x, c)$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $\leq x$ , welche keine Primfaktoren  $> x^c$  ( $c > 0$ ) enthalten, dann gibt es zwei beschränkte Funktionen  $\varphi(y)$  (positiv für  $y > 0$ ) und  $q(y)$  (positiv für  $0 < y < 1$  und sonst 0), so daß für  $\frac{1}{2} \leq c < 1$

$$(1) \quad f(x, c) = x \varphi(c) + q(c) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

und für  $c < \frac{1}{2}$  und alle  $c \geq 1$

$$(2) \quad f(x, c) = x \varphi(c) + q(c) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log(3x/2)}\right).$$

Die Funktionen  $\varphi$  und  $q$  können eindeutig definiert werden: (3)  $\varphi(y) = 0$  für  $y \leq 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(y)$  stetig für  $y = 1$ ,  $\varphi'(y)$  existiert und  $y \varphi'(y) = \varphi(y/(1-y))$  für  $y(y-1)^2 > 0$  (es ist also nicht  $\varphi(y) = y$ , wie man vermuten könnte) und



(4)  $q(y) = 0$  für  $y \leq 0$  und  $y = 1$ , stetig in  $y = \frac{1}{2}$  und stetig von rechts in  $y = 1$ ,  $q(\frac{1}{2}) = 1 - C$  ( $C$  Eulersche Konstante),  $q'(y)$  existiert und es ist  $q'(y)(1-y)y = q(y)(1-y)$  für  $y(y-1)^2(y-\frac{1}{2})^2 > 0$ . — Aus diesen Eigenschaften folgt z. B., daß  $\varphi(y) < K y \{\Gamma(y^{-1})\}^{-1}$  ( $y > 0$ ),  $q(y) < K_2 \{\Gamma(y^{-1})\}^{-1}$  ( $0 < y < 1$ ) und  $\varphi(y)$  und  $q(y)$  alle Ableitungen besitzen ausgenommen für  $y = \frac{1}{n}$ . Man erhält dann aus (1), daß

$$f(x, c) < K x c \text{ für } c \geq \frac{\log 2}{\log x}.$$

Zum Schluß werden noch Verallgemeinerungen diskutiert. *Hlawka (Wien).*

**Ramaswami, V.:** Sequences satisfying  $a_1 = 1$  and  $(r+1)^{-1} a_r \leq a_r - a_{r+1} \leq r^{-1} a_{r-1}$  for  $r > 1$ . *Math. Student, Madras* **16**, 31—33 (1949).

Es mögen dieselben Bezeichnungen wie im vorsteh. Referat gelten. Dann erfüllt die Folge  $a_r = \varphi(1/r)$  die Eigenschaften

(1)  $a_1 = 1$ ,  $(r+1)^{-1} a_r \leq a_r - a_{r+1} \leq r^{-1} a_{r-1}$  für  $r > 1$  und (2)  $a_r \geq 0$  für  $r \geq 1$ .

— Es wird nun gezeigt: Wenn eine beliebige Folge  $\{a_r\}$  (1) erfüllt, dann gilt auch (2) und es ist (3)  $r a_r$  eine monoton nicht wachsende Folge für  $r \geq 2$ , und es existiert entweder  $\lim_{r \rightarrow \infty} r a_r = k > 0$ , oder es ist  $a_r \leq \frac{1}{\Gamma(r)}$  für  $r \geq 1$ . Daraus folgt: Erfüllt

eine Folge  $\{a_r\}$  (1) und ist  $a_r > \frac{1}{\Gamma(r)}$  für ein  $r$ , dann gibt es eine positive Zahl  $k$ , so daß  $a_r > k/r$  für jedes  $r$ . *Hlawka (Wien).*

**Shapiro, Harold N.:** Power-free integers represented by linear forms. *Duke math. J.* **16**, 601—607 (1949).

Verf. zeigt folgenden Satz: Es sei  $Q(N)$  die Anzahl der  $x \leq N$ , so daß die Linearformen  $f_i = a_i x + b_i$  ( $i = 1, \dots, k$ )  $r$ -frei sind. Dann ist

$$(1) \quad Q(N) = B N + O(N^{2/(r+1)+\varepsilon}),$$

wo  $B > 0$  dann und nur dann, wenn es zu jeder Primzahl  $p$  ein  $x_p$  gibt, so daß  $f_i(x_p) \not\equiv 0 (p^r)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Es wird gleich folgender allgemeiner Satz bewiesen: Es sei  $U_k$  die Menge aller Gitterpunkte  $(f_1(x), \dots, f_k(x))$ , wo  $x$  alle ganzen Zahlen  $\geq 0$  durchläuft. Es sei weiter  $P$  eine periodische Eigenschaft von  $U_k$ , d. h. es gebe eine ganze Zahl  $A > 0$ , so daß aus  $X_1 \in U_k$ ,  $X_2 \in U_k$  und  $X_1 \equiv X_2 (A)$  folgt:  $P(X_1) = P(X_2)$ . [ $P(x)$  die charakteristische Funktion von  $P$ .] Ist dann  $Q_P(N)$  die Anzahl der  $x \leq N$ , für welche die  $f_i$   $r$ -frei sind und die zugehörigen Gitterpunkte die Eigenschaft  $P$  haben, so ist entweder  $Q_P(N) = 0$  oder

$$Q_P(N) = A N + O(N^{2/(r+1)+\varepsilon}),$$

wo  $A > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig. Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn es zu jeder endlichen Menge  $M$  von Primzahlen wenigstens ein zulässiges  $x$  gibt, so daß für jedes  $p \in M$ ,  $f_i(x) \not\equiv 0 (p^r)$  und  $P(X) = 1$  ist, wenn  $X$  der Gitterpunkt zu  $x$  ist. Liegt keine zusätzliche Bedingung vor (ist also  $P = E$ ), so folgt (1). Auch ein Satz von Ricci (dies. Zbl. **8**, 241) ist in verschärfter Form in diesem allgemeinen Satz enthalten.

*Hlawka (Wien).*

**Chalk, J. H. H.:** On the product of non-homogeneous linear forms. *J. London math. Soc.* **25**, 46—51 (1950).

Es seien  $L_1, \dots, L_n$   $n$  reelle Linearformen in  $u_1, \dots, u_n$  mit der Determinante 1 und  $c_1, \dots, c_n$  beliebige reelle Zahlen. Wenn sich diese Linearformen nicht in der Gestalt

$$L_r = \lambda_r (\alpha_{r1} u_1 + \dots + \alpha_{rn} u_n) \quad (r = 1, \dots, n)$$

( $\alpha_{rs}$  ganz) schreiben lassen und wenn keine der Formen  $L_r + c_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) die Zahl 0 darstellt, dann gibt es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen  $u_1, \dots, u_n$ , die

$$|(L_1 + c_1) \cdots (L_n + c_n)| \leq \gamma_n$$

befriedigen, sobald  $\gamma_n > 2^{-n/2}$  ist.

*Hofreiter (Wien).*

Cassels, J. W. S.: The Markoff chain. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 676—685 (1949).

Markov hat zuerst unter Benutzung der Theorie der Kettenbrüche bewiesen, daß die Minima bzw. unteren Grenzen  $M$  der reellen indefiniten binären quadratischen Formen mit der Diskriminante  $\Delta$  unter dem Wert  $\sqrt{\Delta/5}$  liegen und ferner gezeigt, daß die Formen, für welche der Wert  $M$  relativ groß, nämlich größer als  $\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}$  ist oder, was auf dasselbe herauskommt, die Diskriminante relativ klein, nämlich zwischen  $5M^2$  und  $9M^2$  gelegen ist, sich in eindeutig bestimmten unendlichen, nur durch den Wert von  $M$  als Faktor unterschiedenen Ketten anordnen lassen. Diese Tatsachen werden hier ohne die Benutzung der Kettenbrüche bewiesen, was indessen nicht als wirklicher Gewinn, sondern nur als eine Verschleierung des Zusammenhangs betrachtet werden kann, weil die Beweisschritte von den Kettenbrüchen gesehen leicht verständlich sind, ohne sie aber willkürlich erscheinen. Brandt.

Chabauty, Claude: Sur les minima arithmétiques des formes. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 367—394 (1949).

Sei  $S$  eine sternförmige Menge im  $n$ -dimensionalen Raum  $R_n$  (d. h. wenn  $X \in S$  und  $0 \leq t \leq 1$ , dann ist auch  $tX \in S$ ). Sei weiter  $\Gamma$  die Menge aller Gitter  $G$  in  $R_n$ , und  $m(G)$  die Determinante von  $G$ . Die sukzessiven Minima  $\mu_h(S, G)$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) von  $S$  in  $G$  sind definiert als die oberen Grenzen aller  $\lambda \geq 0$ , für welche der Durchschnitt  $\lambda S \cap G$  weniger als  $h$  linear unabhängige Punkte enthält. Verf. setzt

$$\gamma(S) = \sup_{G \in \Gamma} m(G)^{-1/n} \mu_1(S, G), \quad \varrho(S) = \sup_{G \in \Gamma} m(G)^{-1} \prod_{h=1}^n \mu_h(S, G)$$

und nennt

$$\alpha(S) = \varrho(S) \gamma(S)^{-n}$$

die Anomalie von  $S$ . Er gibt ausführliche Beweise für die folgenden zwei Sätze: a)  $\alpha(S) \leq 2^{(n-1)/2}$ . b) Die Konstante  $2^{(n-1)/2}$  ist bestmöglich. Skizzen dieser Beweise wurden von ihm bereits in C. r. Acad. Sci., Paris (s. folgendes Referat) veröffentlicht. Unabhängig von ihm und um die gleiche Zeit wurde a) von C. A. Rogers (dies. Zbl. 33, 106) und b) von K. Mahler (dies. Zbl. 33, 106) gefunden. Verf. zeigt, daß  $\alpha(S)$  für Sternkörper jeden Wert zwischen 1 und  $2^{(n-1)/2}$  annehmen kann und daß  $\alpha(S) = 1$  ist für eine gewisse Klasse solcher Körper mit linearen Automorphismen, z. B. für  $|x_1 x_2 \cdots x_n| \leq 1$ . Er wendet seine Ergebnisse auf die Reduktionstheorie allgemeiner Formen und auf die Theorie der Gitter an. K. Mahler (Manchester).

Chabauty, Claude: Géométrie des nombres d'ensembles non convexes. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 747—749 (1948), 228, 796—797 (1949).

Chabauty, Claude: Sur le minimum du produit de formes linéaires réelles. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1361—1363 (1949).

Bezeichne  $R^n$  den  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum,  $m(G)$  die Determinante eines Punktgitters  $G$ ,  $S$  einen Sternbereich (in bezug auf den Nullpunkt),  $\mu_h(S, G)$  ( $h = 1, \dots, n$ ) die obere Grenze der  $\mu (\geq 0)$ , für die die Dimension von  $(\mu S) \cap G$  kleiner als  $h$  ist. Man setze

$$\gamma(S) = \sup_G (m(G))^{-1/n} \mu_1(S, G) \quad (\text{die Konstante von Hermite}),$$

$$\varrho(S) = \sup_G (m(G))^{-1} \prod_{k=1}^n \mu_k(S, G),$$

$$\alpha(S) = \varrho(S) (\gamma(S))^{-n} \quad (\text{die „Anomalie von } S^c).$$

Es ist stets  $\alpha(S) \geq 1$ . — Satz. Es gilt  $\alpha(S) \leq 2^{(n-1)/2}$ , die rechte Seite läßt sich nicht verkleinern. Der Beweis der ersten Hälfte beruht auf der an sich sehr inter-



essanten Auswertung

$$(1) \quad \psi(n) = \sup_{(x_h)} \inf_{(y_h)} \prod_{h=1}^n (x_h/y_h) = 2^{(n-1)/2} \left( \begin{array}{l} 0 < x_1 \leq \dots \leq x_n, \\ 0 < y_h < x_h, y_h \text{ ganz, } y_h | y_{h+1} \end{array} \right).$$

(Früher war bloß  $\psi(n) < 2^{n-1}$  bekannt.) Ref. bemerkt, daß im Beweis von (1) im dritten Abschnitt der zweiten Mitteilung wesentliche Fehler stecken (abgesehen vom Druckfehler „ $\leq$ “, wofür „ $\geq$ “ stehen sollte), trotzdem ist (1) richtig, und zwar läßt es sich leicht direkt zeigen, daß für  $x_h = 2^{(h-1)/n}$  das „Inf“ in (1) gleich der rechten Seite von (1) ist. Die zweite Hälfte des Satzes wird durch direkte Konstruktion bewiesen.  $Z^n$  bezeichne das Punktgitter, bestehend aus allen Punkten mit ganzen Koordinaten,  $z = (z_1, \dots, z_n)$  einen primitiven Punkt von  $Z^n$ ,  $A_z$  den Halbstrahl  $\lambda z$  ( $\lambda \geq 2^{(1-h)/n}$ ), wobei  $h$  die kleinste ganze Zahl mit  $z_k = 0$  ( $k > h$ ) ist,  $U$  die Vereinigungsmenge aller  $A_z$ ,  $S$  das Komplementäre von  $U$ ; dann ist  $S$  extremal. Es werden auch beschränkte  $S$ , sogar Polyeder  $S$  angegeben, für die  $\alpha(S)$  in beliebiger Nähe von  $2^{(n-1)/2}$  liegt. — Satz: Sind  $S, T$  ( $S \subset T$ ) zwei Sternbereiche (in bezug auf den Nullpunkt), so gilt

$$\gamma(T) \leq \gamma(S) 2^{(h-1)/n} \lambda^{-1+(h-1)/n},$$

wobei für  $\lambda(>0)$   $G \cap \lambda S$  von einer Dimension  $< h$  ist und  $G$  ein kritisches Gitter für  $T$  bezeichnet. — Satz: Für jede Konstante  $c(>0)$  und genügend großes  $n$  gibt es für jedes System von  $n$  reellen homogenen Linearformen  $L_i(x_1, \dots, x_n)$  mit der Determinante 1 ganze Zahlen  $x_i$  so, daß

$$0 < \left| \prod_{i=1}^n L_i(x_1, \dots, x_n) \right|^{1/n} \leq \frac{\sigma(1+c)}{\theta_n}.$$

gilt; dabei bedeuten  $\theta, \sigma$  folgendes:  $P_n, S_n$  bezeichnen die Menge der  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $\prod |x_i| < 1$  bzw.  $\sum |x_i| < n$ ,  $\theta_n = \inf_{G} \mu_2(S_n, G)$  für die  $G$ , die für  $S_n$  zulässig sind und  $(1, \dots, 1)$  enthalten,  $\theta = \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ ,  $\sigma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(S_n) n^{-1}$ . — Es wird

auf mehrere Zusammenhänge mit früheren (teils schwächeren) Resultaten von Jarnik und Knichal, Davenport, Minkowski hingewiesen. Rédei.

**Schneider, Theodor:** Über einen Hlawkaschen Satz aus der Geometrie der Zahlen.

Arch. Math., Karlsruhe 2, 81—86 (1950).

Ref. stellte (dies. Zbl. 28, 206) folgenden Alternativsatz auf: Es sei  $k_0$  eine natürliche Zahl,  $k_1, \dots, k_n$  positive Zahlen,  $K$  die Diagonalmatrix mit den Elementen  $k_i$ ,  $M$  eine beschränkte, im Jordanschen Sinne meßbare Menge im  $R_n$ ,  $M(K) = K^{-1}(x-y)$  ( $x, y$  bel. aus  $M$ ). Besitzt dann  $M$  ein Volumen  $\geq \frac{1}{2} k_0 |K|$  und sind höchstens  $k_0 - r - 1$  Gitterpunktpaare  $\neq 0$  innere Punkte von  $M(K)$  ( $0 \leq r \leq k_0 - [k_0/2] - 1$ ), so gibt es zu jedem  $x_0$  aus  $R_n$  mindestens  $r+1$  Gitterpunkte  $g$ , so daß  $x_0 + g$  in  $M(K)$  liegt. Für diesen Satz hat der Ref. noch einen weiteren Beweis gegeben [„Über einen Satz aus der Geometrie der Zahlen“, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 155, 75 (1946)]. Der Verf. gibt nun einen weiteren zahlengeometrischen Beweis und zeigt, daß für  $r=0$  es mindestens  $k_0$  Gitterpunkte  $g$  gibt, so daß  $x_0 + g$  in  $M(K)$  liegt. Dies stellt eine bedeutende Verschärfung für  $k_0 \geq 2$  dar. Die Überlegungen, welche zu dieser Verschärfung führen, dürften nach Ansicht des Ref. für viele Probleme aus der Geometrie der Zahlen sehr nützlich sein.

Hlawka (Wien).

**Schneider, Theodor:** Eine Bemerkung zur Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen. Arch. Math., Karlsruhe 2, 87—89 (1950).

Bekanntlich ist die Vermutung von Minkowski, daß es zu  $n$  Linearformen  $L_1(x), \dots, L_n(x)$  mit Determinante 1 und einem beliebigen Punkt  $x_0$  des  $R_n$  stets einen Gitterpunkt  $g$  gibt, so daß

$$(1) \quad \left| \prod_{i=1}^n L_i(g - x_0) \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

ist, nur bis  $n = 4$  gelöst. Der Verf. zeigt nun unter Verwendung des Alternativsatzes (vgl. vorstehendes Referat): Wenn es positive Zahlen  $t_1, \dots, t_n$  mit  $t_1 \cdots t_n = 1$  gibt, so daß der Bereich  $\text{Max}_{i=1, \dots, n} \left( \frac{|L_i|}{t_i} \right) \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \frac{|L_i|}{t_i} \leq \frac{n}{2}$  keinen Gitterpunkt  $\neq 0$  enthält, dann ist (1) richtig. Dieser Satz ist schärfer als ein Satz von Kownner (Koksma, Diophantische Approximationen, dies. Zbl. 12, 396). *Hlawka* (Wien).

**Ricci, Giovanni:** Figure, reticoli e computo di nodi. Rend. Sem. mat. fis., Milano 19, 165—205 (1949).

Verf. gibt eine Übersicht über die bisher erhaltenen Resultate, welche bei dem Problem der Anzahl der Gitterpunkte in (ebenen) Bereichen erhalten werden. Zunächst wird das Quadrat und der Rhombus behandelt, dann der Kreis und die Hyperbel nach Gauß und Dirichlet. Es folgt dann ein Bericht über die Abschätzung des „Gitterrestes“  $R(t)$  bei Kreis und Hyperbel (Sierpinski, Voronoï, Landau u. a.) und bei allgemeineren Bereichen (Jarnik, van der Corput) und der Verschärfungen beim Kreisproblem, welche bis 1942 erzielt wurden. Dann

folgen die Untersuchungen von Hardy und Cramer über  $\frac{1}{x} \int_1^x R^2(u) du$  und

$\frac{1}{x} \int_1^x |R(u)| du$ . Dann wird das analoge Problem im  $k$ -dimensionalen Raum besprochen und über die Ergebnisse von Landau, Walfisz und Jarnik referiert. Den Abschluß bildet ein Bericht über die Untersuchungen von Kendall, welche

das Problem statistisch behandeln (vgl. dies. Zbl. 31, 112). *Hlawka* (Wien).

**Chalk, J. H. H. and C. A. Rogers:** The successive minima of a convex cylinder. J. London math. Soc. 24, 284—291 (1950).

Es sei  $S$  ein konvexer Bereich im  $R_n$  und bezüglich  $O$  symmetrisch,  $A$  sei ein Gitter mit  $O$  als Gitterpunkt,  $d(A)$  die Determinante des Gitters,  $\Delta(S)$  die kritische Determinante (kleinste Determinante der zulässigen Gitter),  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seien die sukzessiven Minima. Dann gilt vermutlich

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \Delta(S) \leq d(A).$$

Hier wird diese Ungleichung für konvexe Zylinder im  $R_3$  mit zahlengeometrischen Überlegungen bewiesen. *Hofreiter* (Wien).

**Cassels, J. W. S.:** Some metrical theorems in diophantine approximation. I, III. Proc. Cambridge philos. Soc. 46, 209—218; 219—225 (1950).

Im ersten Teil der Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit folgenden diophantischen Approximationen vom inhomogenen bzw. homogenen Typus: Es seien  $\psi_1(n), \dots, \psi_s(n)$   $s$ -nicht-negative Funktionen der ganzen Zahl  $n$ ,  $\psi(n) = \prod_{j=1}^s \psi_j(n)$ , dann handelt es sich um die Lösungen der Ungleichungen

$$(1) \quad 0 \leq n\theta_j - m_j - \alpha_j < \psi_j(n) \quad (j = 1, \dots, s)$$

bzw.

$$(2) \quad 0 \leq n\theta_j - m_j < \psi_j(n) \quad (j = 1, \dots, s).$$

Es wird nun gezeigt: Satz 1: (1) besitzt unendlich viele Lösungen mit  $n > 0$  und ganzen Zahlen  $m_j$  für fast alle  $\theta_j, \alpha_j$ , wenn  $\sum \psi(n)$  divergiert. Konvergiert aber diese Reihe, so ist dies für fast alle  $\theta_j, \alpha_j$  nicht der Fall. Satz 2: Ist  $\psi(n)$  monoton abnehmend, so gelten die analogen Behauptungen für (2). — Man kann (1) und (2) dahin verallgemeinern, daß auf der linken Seite von (1) bzw. (2)  $n$  durch eine Folge  $\{\lambda_n\}$  von verschiedenen ganzen Zahlen ersetzt wird. Es muß allerdings bei (2) vorausgesetzt werden, daß  $\{\lambda_n\}$  eine  $\Sigma$ -Folge ist. Darunter wird folgendes verstanden: Ist  $\mu_n$  die Anzahl der Brüche der Gestalt  $j/\lambda_n$  ( $0 < j < \lambda_n$ ), welche nicht von der



Gestalt  $k/\lambda_q$  ( $q < n$ ) sind, dann sei

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n \leq N} \mu_n \lambda_n^{-1} > 0.$$

Es ist z. B.  $\{n^k\}$  eine solche Folge. Beispiele zeigen, daß diese Bedingung für die  $\lambda_n$  nicht entbehrt werden kann. — Beim Beweis von Satz 1 wird in interessanter Weise ein Lemma, welches im wesentlichen von Paley und Zygmund (dies. Zbl. 6, 198; Lemma 19 der dort referierten Arbeit) herrührt, benützt. Zum Beweis des Satzes 2 wird u. a. folgendes Lemma bewiesen: Ist  $E$  eine Menge von positivem Maße im Einheitsintervall, dann haben fast alle  $\theta$  die Gestalt  $\theta \equiv t\theta_1 \pmod{1}$ , wo  $\theta_1$  aus  $E$  und  $t$  eine natürliche Zahl ist. — In III wird folgender Satz bewiesen, der fast gleichzeitig auch von Erdős und Koksma (dies. Zbl. 35, 321) gefunden wurde: Es seien  $w$  Folgen differenzierbarer Funktionen  $(f_{nj}(\theta_j))$  auf  $[a_j, b_j]$  gegeben. Weiter sei für jedes  $j$  und jedes  $m \neq n$   $f_{mj}(\theta_j) - f_{nj}(\theta_j)$  monoton und dem Betrage nach  $\geq K > 0$ , wo  $K$  unabhängig von  $m, n, j, \theta_j$  ist. Ist nun  $F_N(\beta, \gamma; \theta)$  mit  $0 \leq \beta_j \leq \gamma_j \leq 1$  die Anzahl der  $n \leq N$ , für die  $\beta_j \leq \{f_{nj}(\theta_j)\} < \gamma_j$  ( $j = 1, \dots, w$ ) ( $\{x\} = x - [x]$ ), so gilt für  $R_N(\beta, \gamma; \theta) = F_N(\beta, \gamma; \theta) - N \prod_{j=1}^w (\gamma_j - \beta_j)$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , für fast alle  $\theta_j$  und alle  $\beta, \gamma, N > N_0(\theta, \varepsilon)$

$$|R_N(\beta, \gamma; \theta)| < N^{1/2} \log^{w+3/2+\varepsilon} N$$

d. h. die Diskrepanz  $D(N)$  ist  $< N^{-1/2} \log^{w+3/2+\varepsilon} N$  für großes  $N$ . Die Voraussetzungen sind erfüllt für  $f_{nj}(\theta) = \lambda_{nj}$  ( $\lambda_{nj}$  ganze Zahlen,  $\lambda_{nj} \neq \lambda_{mj}$ , wenn  $m \neq n$ ). Der Beweis ist von dem, welchen Erdős und Koksma gegeben haben, vollkommen verschieden.

Hlawka (Wien).

**Perron, Oskar:** Neuer Beweis zweier klassischer Sätze über diophantische Approximationen. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 125—130 (1950).

Es ist bekannt, daß die diophantische Ungleichung  $|\alpha - x/y| < 5^{-1/2} y^{-2}$  für irrationales  $\alpha$  unendlich viele Lösungen hat (A. Hurwitz). Eine ähnliche Aussage gilt für die Ungleichung  $|\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2| \leq 1/\sqrt{5}$ , wo  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 1$ . Verf. gibt sehr einfache Beweise für die obigen Sätze, welche auf dem folgenden Hilfssatz gegründet sind: Aus den Ungleichungen  $0 < \delta, \lambda < 1$  und (I)  $\delta \geq 1/\sqrt{5}$ ; (II)  $\lambda + \delta\lambda^2 \geq 1/\sqrt{5}$ ; (III)  $1 - \lambda - \delta(1 - \lambda)^2 \geq 1/\sqrt{5}$  folgt  $\delta = \delta_0 = 1/\sqrt{5}$  und  $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ . Mit anderen Worten: Wenn  $\delta, \lambda$ ;  $0 < \delta, \lambda < 1$  vom Wertepaar  $\delta_0, \lambda_0$  verschieden ist, dann ist wenigstens eine der (positiven) Zahlen  $\delta, \lambda + \delta\lambda^2, 1 - \lambda - \delta(1 - \lambda)^2$  kleiner als  $1/\sqrt{5}$ . — Beweis:  $(1 - \lambda)^2 \cdot (I) + (III)$  bzw.  $(1 - \lambda)^2 \cdot (II) + \lambda^2 \cdot (III)$  ist eine andere Form der Ungleichung  $\lambda \leq \lambda_0$  bzw.  $\lambda \geq \lambda_0$ , d. h.  $\lambda = \lambda_0$ . Für  $\lambda = \lambda_0$  bedeutet aber (III) die Ungleichung  $\delta \leq \delta_0$ , also hat man zusammen mit (I):  $\delta = \delta_0$ . — Mit Hilfe dieses Lemmas folgt der Satz von Hurwitz einfach: Nach dem Schubfachprinzip gibt es unendlich viele  $x, y$ , für welche (IV)  $|\alpha - x/y| < y^{-2}$ , ( $x, y = 1, y > 0$ ) gilt. Sei  $x_1, y_1$  durch die Bedingung (V)  $xy_1 - yx_1 = \text{sign}(\alpha - x/y)$ ;  $0 < y_1 < y$  (eindeutig) bestimmt. Bezeichnet weiter  $\delta = |\alpha y^2 - xy|$  und  $\lambda = y_1/y$  ( $\neq \lambda_0$ ), dann ist nach dem Lemma wenigstens eine der Zahlen  $y^2|\alpha - x/y| = \delta$ ,  $y_1^2|\alpha - x_1/y_1| = \lambda + \delta\lambda^2$  und

$$(y - y_1)^2 |\alpha - (x - x_1)/(y - y_1)| = 1 - \lambda - \delta(1 - \lambda)^2$$

kleiner als  $1/\sqrt{5}$ . Es genügt also zu zeigen, daß es unter den Paaren  $x_1, y_1$  bzw.  $x - x_1, y - y_1$  unendlich viele verschiedene gibt. Mit Rücksicht auf (IV) und (V) folgt aber für  $y \rightarrow \infty$ :  $|\alpha - x_1/y_1| \rightarrow 0$  und  $|\alpha - (x - x_1)/(y - y_1)| \rightarrow 0$ , d. h.  $y_1 \rightarrow \infty$  und  $y - y_1 \rightarrow \infty$  mit  $y$  (= Lösung von (IV)).

Gál (Paris).

**Aardenne-Ehrenfest, T. van:** On the impossibility of a just distribution. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 734—739; Indag. math., Amsterdam 11, 264—269 (1949).

Es sei  $\{c_i\}$  eine beliebige unendliche Folge reeller Zahlen aus  $I: [0, 1]$ . Es sei

$\alpha$  ein Teilintervall aus  $I$  und  $A_n(\alpha)$  die Anzahl der  $c_1, \dots, c_n$ , welche in  $\alpha$  liegen,  $F_n(\alpha) = A_n(\alpha) - |\alpha| n$ ,  $F_n = \sup_{\alpha} |F_n(\alpha)|$ . Dann wird gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F_n : \frac{\log \log n}{\log \log \log n} \right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Es gilt also keine Verteilung, so daß  $F_n$  beschränkt ist (keine „gerechte Verteilung“). Dies wurde bereits von van der Corput vermutet, aber zuerst von der Verf. bewiesen [Proc. Akad. Wet., Amsterdam 48, 266 (1945)]. Dieser wichtige Satz wird nun jetzt etwas einfacher bewiesen. Der Beweis ist äußerst scharfsinnig. *Hlawka* (Wien).

**Erdős, P and J. E. Koksma:** On the uniform distribution modulo 1 of sequences  $(f(n, \theta))$ . Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 851—854 (1949); Indag. math., Amsterdam 11, 299—302 (1949).

Verff. haben in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 33, 165) lakunäre Folgen behandelt. Es werden nun allgemeinere Folgen  $\{f(n, \theta)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) betrachtet für jedes  $\theta$  aus  $[\alpha, \beta]$  mit stetiger Ableitung  $f'_\theta$ . Es wird weiter vorausgesetzt, daß für jedes Paar  $n_1, n_2$  ( $n_1 \neq n_2$ )  $f'_\theta(n_1, \theta) - f'_\theta(n_2, \theta)$  eine nicht abnehmende oder nichtzunehmende Funktion in  $\theta$  ist mit einem Betrag  $\geq \delta > 0$ , wo  $\delta$  unabhängig von  $n_1, n_2$  ist. Dann gilt für fast alle  $\theta$

$$ND(N, \theta) = O(N^{\frac{1}{2}} \log^{5/2 + \varepsilon} N)$$

( $\varepsilon > 0$ ). Dabei ist  $D(N, \theta)$  die Diskrepanz der Folge. Es wird gleich ein allgemeinerer Satz bewiesen. Benützt wird ein Lemma von Koksma (dies. Zbl. 12, 14) und, wie in der früheren Arbeit, die Verschärfung des Satzes von van der Corput-Koksma durch Erdős-Turán. *Hlawka* (Wien).

## Analysis.

### Allgemeines:

● **Blakey, Joseph:** University mathematics. A text-book for students of science and engineering. Glasgow: Blackie and Son Ltd. 1949. 527 p., 25 s. net.

● **Cooley, H. R., D. Gans, M. Kline and H. E. Wahlert:** Introduction to mathematics. — 2<sup>nd</sup> ed. Boston: Houghton Mifflin 1949. XXII, 170 p.; \$ 4,25.

● **Schelkunoff, S. A.:** Applied mathematics for engineers and scientists. Toronto, New York and London: D. Van Nostrand Co., Inc. 1948. XI, 472 p.; \$ 6.50.

Das Buch stellt von dem Gesamtgebiet der Höheren Mathematik die für die Anwendungen in Physik und Technik wichtigsten Dinge zusammen. Der erste Teil behandelt mathematische Methoden, der zweite Teil spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Der erste Teil bringt in den einzelnen Kapiteln komplexe Zahlen, Approximation von Funktionen, Lösung von Gleichungen, Potenzreihen, Differentiation und Integration, Vektoranalysis, Koordinatensysteme, Exponentialfunktionen, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, konforme Abbildungen, Integration im Komplexen und Laplacesche Transformation. Das Buch wendet sich an einen Leser, der von den Dingen schon gehört hat, aber für Anwendungszwecke sich nochmals über den gerade benötigten Gegenstand informieren will. Dadurch ist die Darstellungsart bedingt; es werden Beweise teilweise gebracht, oft werden sie nur angedeutet oder unterdrückt, und es werden in den einzelnen Kapiteln häufig Dinge benutzt, die erst in späteren Kapiteln systematisch eingeführt werden, wie z. B. Differentialgleichungen, Hyperbelfunktionen, Integrationen usw. Der zweite Teil behandelt die Gammafunktion, Exponentialintegrale, Fresnelsche Integrale, Besselfunktionen und in einem besonderen Kapitel „Formulierung von Gleichungen“, in welchem der Leser die Übung erhalten soll, physikalische Aufgaben mathematisch zu formulieren. *Collatz* (Hannover).



● Smirnov, B. I.: *Lehrbuch der höheren Mathematik. II.* 9. Aufl. Leningrad u. Moskau: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948. 622 S. 19 Rb. [Russisch].

Kapitelüberschriften: I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. II. Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen. III. Mehrfache und Kurvenintegrale, uneigentliche Integrale und Integrale, die von einem Parameter abhängen. IV. Vektoranalysis und Theorie der Felder. V. Grundlagen der Differentialgeometrie. VI. Fourier-Reihen. VII. Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. — Bei der Sichtung des Stoffes hat Verf., abgesehen von der Beschränkung auf das reelle Gebiet, das grundlegend Wichtige ausgewählt und besonders auf die Anwendungen Rücksicht genommen. Schwierigere Betrachtungen, z. B. die Existenzsätze in der Theorie der Differentialgleichungen oder die bei den vielfachen Integralen notwendigen Untersuchungen zum Inhaltsbegriff usw. sind, durch Druck und Anordnung gekennzeichnet, so dargestellt, daß sie bei der ersten Lektüre übergangen werden können, ohne daß das Verständnis des Ganzen dabei leidet. Im einzelnen sei noch bemerkt: Kap. I enthält vornehmlich die Differentialgleichungen 1. Ordnung. Kap. II beschäftigt sich zuerst mit der Gleichung mit konstanten Koeffizienten, für die allerlei Beispiele aus der Physik erörtert werden. Eine kurze Darstellung der sog. symbolischen Methode (ohne deren Zusammenhang mit Integraltransformationen) ist beigelegt. Der Fall beliebiger Koeffizienten wird im wesentlichen nur an der Gleichung zweiter Ordnung behandelt. Kap. V bringt die Grundzüge der Kurventheorie in der Ebene und im Raum. Kap. VI enthält die einfachsten Existenz- und Entwicklungssätze, eine kurze Ausführung über die Approximation einer Funktion durch Polynome sowie über das Fouriersche Integral und mehrfache Fourier-Reihen. Kap. VII endlich stellt eine Reihe der wichtigsten Lösungsmethoden an Beispielen dar, wobei die bekannten Gleichungstypen (Wellen-, Telegraphen-, Potential- und Wärmeleitungsgleichung) kurz behandelt werden.

W. Hahn (Berlin).

Masip, R.: *Bernoullische Zahlen.* Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 7, 7—10 und 41—45 (1947) [Spanisch].

Kašanin, Radivoje: *L'introduction en arithmétique de l'angle, des fonctions trigonométriques et du nombre  $\pi$ .* Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 149—160 und französ. Zusammenfassg. 161 (1948) [Serbisch].

Lorsqu'en Arithmétique on doit passer des nombres réels aux nombres complexes, on doit recourir à la notion d'angle, de fonctions trigonométriques et de nombre  $\pi$ . Or, ces notions sont empruntées à la Géométrie ou à la Théorie des fonctions d'une variable réelle. — On se propose dans le présent travail de montrer un procédé permettant de les introduire déjà en Arithmétique. — Nous supposons que l'on ait déjà créée, d'une manière quelconque, l'Arithmétique des nombres réels que l'on ait déjà introduit les notions de suite et de limites des nombres réels que l'on ait introduit aussi les nombres complexes, sous la forme  $a + bi$ , ainsi que les quatre opérations élémentaires algébriques avec ces derniers, que l'on ait expliqué  $(a + bi)^n$  pour  $n$  entier et positif (comme itération de produits), que l'on ait défini

$$(a + bi)^{-n} = 1 : (a + bi)^n \text{ et } (a + bi)^0 = 1,$$

et, enfin, la formule de binôme connue. — Alors on peut, par une méthode purement arithmétique, définir l'angle, les fonctions trigonométriques et le nombre  $\pi$ .

(Autoreferat).

### Mengenlehre:

Dubreil-Jacotin, Marie-Louise: *Quelques propriétés des applications multiformes.* C. r. Acad. Sci., Paris 230, 806—808 (1950).

Es sei  $f$  eine mehr-mehdeutige Abbildung der Menge  $E$  auf die Menge  $E'$ , und  $f^{-1}$  ihre inverse Abbildung.  $f$  definiert eine Relation  $\tau$  zwischen Elementen von  $E$ , so daß  $x \tau y$  bedeutet:  $x$  gehört zur Menge  $f^{-1}f(y)$ , oder, was damit äquivalent ist,

$y \in f^{-1}f(x)$ . Eine Untermenge  $S$  von  $E$  ist invariant (franz. „stable“), wenn  $f^{-1}f(S) = S$ . Die Gesamtheit  $\mathfrak{M}$  der invarianten Untermengen von  $E$  ist nicht leer und ist abgeschlossen in bezug auf Durchschnitt, Vereinigung und Differenz. Folglich ist  $\mathfrak{M}$  ein vollständiger Körper von Mengen.  $\mathfrak{M}$  besitzt minimale Systeme  $\sigma$ , deren Existenz dadurch gesichert wird, daß der Durchschnitt  $S_x$  aller ein fixes Element  $x$  enthaltenden  $S$  kein echtes invariantes Untersystem enthält. Die Gesamtheit der minimalen  $S$  liefert eine Klasseneinteilung von  $E$ ; es sei  $c$  die zugehörige Äquivalenzrelation:  $xy$  bedeute, daß  $x$  und  $y$  zu demselben  $\sigma (= S_x = S_y)$  gehören. Verf. beweist, daß die Äquivalenzrelation  $c$  gleich der kleinsten (transitiven) Äquivalenzrelation ist, die  $\tau$  enthält; folglich gilt  $xcy$  dann und nur dann, wenn  $y \in f^{-1}ff^{-1}f \dots f^{-1}f(x)$  (endlich-vielmal). Eine ähnliche Betrachtung der Bildmenge  $E'$  zeigt, daß eine eindeutige Abbildung zwischen  $\mathfrak{M}$  und der in analoger Weise definierten Menge  $\mathfrak{M}'$ , ferner eine solche zwischen den Quotientenmengen  $E/c$  und  $E'/c'$  existiert. Dieses Hauptergebnis wird durch zwei Beispiele aus der Geometrie bzw. der Idealtheorie illustriert.

L. Fuchs (Budapest).

**Dubreil-Jacotin, Marie-Louise:** Applications multiformes et relations d'équivalences. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 906—908 (1950).

Zwei Äquivalenzrelationen  $R, R'$ , die in Mengen  $E, E'$  definiert sind, heißen verträglich bezüglich einer Zuordnung  $f$  zwischen  $E$  und  $E'$ , wenn gilt

$$x R y, x' \in f(x), y' \in f(y) \rightarrow x' R y'.$$

Unter den mit  $R$  bezüglich  $f$  verträglichen Äquivalenzrelationen von  $E'$  gibt es eine kleinste  $R'_1$ . Die Bestimmung von  $R'_1$  läßt sich zurückführen auf die Fälle, in denen durch

$$x' R'_1 y' \leftrightarrow \exists x, y: x \in f^{-1}(x'), y \in f^{-1}(y'), x R y$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.

Lorenzen (Bonn).

**Dubreil, Paul:** Comportement des relations binaires dans une application multiforme. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1242—1243 (1950).

Für eine Zuordnung  $f$  von  $E$  auf  $E'$  und eine Relation  $R$  in  $E$  werden Relationen  $R'_0, R'_1$  in  $E'$  definiert durch

$$x' R'_0 y' \leftrightarrow \forall x, y (x \in f^{-1}(x') \wedge y \in f^{-1}(y') \rightarrow x R y)$$

$$x' R'_1 y' \leftrightarrow \exists x, y (x \in f^{-1}(x') \wedge y \in f^{-1}(y') \wedge x R y).$$

Es werden einfache Sätze über  $f$ -Invarianz und  $f$ -Verträglichkeit (vgl. L. Dubreil-Jacotin, vorstehende Referate) bewiesen.

Lorenzen (Bonn).

**Ščegol'kov, E. A.:** Über die Uniformisierung gewisser  $B$ -Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **59**, 1065—1068 (1948) [Russisch].

Im Anschluß an frühere Resultate von N. Lusin und P. Novikov beweist Verf. den Satz, daß jede ebene  $B$ -Menge, deren Durchschnitte mit den Geraden  $r = \text{const.}$  Mengen  $F_\sigma$  sind, mittels einer  $B$ -Menge uniformisiert werden kann. Zum Beweis wird der vorher bewiesene Hilfssatz verwendet, daß eine elementare  $CA$ -Menge, deren Projektion (auf die  $OX$ -Achse) eine  $B$ -Menge ist, mittels einer  $B$ -Menge uniformisiert wird. Elementar nennt Verf. eine Menge, wenn sie Durchschnitt einer Folge ineinandergeschachtelter Mengen ist, von denen jede sich mit den Geraden  $r = \text{const.}$  auf einer endlichen Anzahl abgeschlossener Intervalle überschneidet.

Neumer (Mainz).

**Ljapunov, A. A.:** Über mengentheoretische Operationen, die die Meßbarkeit erhalten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 609—612 (1949) [Russisch].

Verf. bildet mit Hilfe der von Kantorovič und Livenson [Fundam. Math., Warszawa **18**, 214—279 (1932); dies. Zbl. **4**, 294] eingeführten Mengenoperation  $P_N(\{E_n\}) = \sum_{n \in N} \left( \prod_{n \in \eta} E_n \cdot \prod_{m \in \eta} CE_m \right)$  über einer Mengenfolge  $\{E_n\}$  und der Basis  $N$ , und der  $\Gamma$ -Operation von P. Alexandroff [Fundam. Math., Warszawa **5**, 160



(1924)] durch transfinite Induktion ein System von Mengenoperationen, welche die Konstruktion von neuen Klassen meßbarer Mengen gestatten. Die Operationen klassifizieren sich nach den Zahlen der dritten Zahlklasse, wobei für „nicht allzu große“ Zahlen jede zugehörige Operation individuell völlig bestimmt erscheint. Um die Bildung für alle transfiniten Zahlen der dritten Zahlklasse durchzuführen, ist die Anwendung des Zermeloschen Auswahlaxioms nicht zu umgehen; von da an wo es benutzt wird, hat das System der definierten Operationen verzweigten Charakter.

Aumann (Würzburg).

**Bagemihl, Frederick:** On the partial products of infinite products of alephs. Amer. J. Math. 70, 207—211 (1948).

Verf. verabredet folgende Bezeichnungen: 1.  $\lambda$  bedeute eine transfinite Limeszahl. 2. Für  $\xi < \lambda$  soll  $a_\xi$  eine transfinite Kardinalzahl sein. 3.  $\bar{s} = \sum_{\xi < \lambda} a_\xi$ .

$g = \prod_{\xi < \lambda} a_\xi$ . 4.  $g_0 = 1$ ,  $g_\xi = \prod_{\nu < \xi} a_\nu$  für  $0 < \xi < \lambda$ . Die  $g_\xi$  heißen die Partialprodukte von  $g$ . 5.  $\bar{\alpha}$  bedeute die zu der Ordinalzahl  $\alpha$  gehörige Mächtigkeit. — Tarski hat

einen Satz bewiesen, der sich wie folgt darstellen läßt: Wenn gilt: 1.  $\alpha_\alpha < \alpha_\beta$  für  $\alpha < \beta < \lambda$  und 2.  $\lambda = \omega^\delta$ , dann gilt: 3.  $g = g^2$ . Man weiß nicht, ob 3. auch dann noch immer richtig bleibt, wenn die Voraussetzung 2. aufgegeben wird. — Verf. beweist nun folgende Verallgemeinerung des Tarskischen Satzes: Wenn 2. gilt, sowie 4.  $\alpha_\alpha \leq \alpha_\beta$  für  $\alpha < \beta < \lambda$ , so gilt wiederum 3.. — Verf. gibt nun ein Beispiel dafür, daß 3. ungültig werden kann, wenn man auf die Bedingung 2. verzichtet. Aber auch dann kann man noch beweisen, daß  $g = \prod_{\xi < \lambda} g_\xi$  ist. Wenn

aber auch 4. aufgegeben wird, so braucht die letzte Beziehung nicht mehr zu gelten, wie Verf., an Hand eines Beispiels zeigt. — Endlich zeigt Verf., daß stets  $g = g^{\aleph_n}$  ist, falls 4. gilt und  $\lambda$  in der Cantorsche Normaldarstellung so aussieht

$\lambda = \sum_{i=1}^n \aleph_i$ , wo  $n < \omega$  und  $\aleph_i = \omega^{\delta_i}$  mit  $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_n$  ist.

Neumer.

**Sierpiński, Waclaw:** Solution de l'équation  $\omega^\xi = \xi^\omega$  pour les nombres ordinaux. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedicat. 49—50 (1950).

Verf. zeigt, daß alle Ordnungszahlen  $\xi$ , welche die Bedingung  $\omega^\xi = \xi^\omega$  erfüllen, die Form  $\xi = \varepsilon \omega$  haben, wo  $\varepsilon = \omega^\varepsilon$  eine beliebige  $\varepsilon$ -Zahl ist, und daß auch die Umkehrung gilt. — Ist ferner  $\alpha$  eine beliebige Limeszahl und  $\varepsilon$  eine  $\varepsilon$ -Zahl  $> \alpha$ , so genügen alle  $\xi = \varepsilon \alpha$  der Gleichung  $\alpha^\xi = \xi^\alpha$ . [Diese Ergebnisse sind schon enthalten in der Arbeit von E. Jacobsthal: Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen. Math. Ann., Berlin 64, 475—488 (1907). Dort ist darüber hinaus u. a. gezeigt, daß bei gegebener Limeszahl  $\alpha$  umgekehrt alle Lösungen  $\xi > \alpha$  der Gleichung  $\alpha^\xi = \xi^\alpha$  die Form  $\xi = \varepsilon \alpha$  besitzen, wo  $\varepsilon$  eine  $\varepsilon$ -Zahl  $> \alpha$  ist. Ref.]

Neumer (Mainz).

**Balaster, G.:** Das Kontinuumproblem. — Bericht über einen Vortrag von P. Finsler im Math. Kolloquium Winterthur vom 6. 3. 1950. Elemente Math. Basel 5, 63—65 (1950).

**Borel, Émile:** Analyse et géométrie euclidiennes. C. r. Acad. Sci., Paris 236 1989—1991 (1950).

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• **Maak, W.:** Differential- und Integralrechnung. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften.) Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbütteler Verlag, anstalt 1949. 235 S. mit 17 Bildern; geb. DM 11.—.

Mit diesem kurzgefaßten Lehrbuch beabsichtigt Verf. „den Leser in großen Zügen mit den Methoden und Fragestellungen der Differential- und Integralrechnung bekannt zu machen“. — In der Einleitung wird der Begriff der reellen Zahlen

axiomatisch definiert, was allerdings gewisse Routine an abstraktem Denken vom Leser verlangt, aber die langweilige Diskussion der Dedekindschen Schnitte oder Ähnliches ihm erspart. Dann folgt der Begriff des Grenzwertes, und zwar zuerst des Grenzwertes von Zahlenfolgen und die betreffenden Rechenregeln, dann des Grenzwertes von Funktionen einer Veränderlichen. Das folgende dritte Kapitel behandelt die Eigenschaften der stetigen Funktionen. Hier wird die Exponentialfunktion auf Grund ihrer Funktionalgleichung eingeführt. Im vierten Kapitel befindet sich die Definition des Differentialquotienten mit den Differentiationsregeln sowie der Mittelwertsatz und einiges über Interpolation. In dieser Richtung gelangt man bis zum Schlömilchschen Restglied der Taylorschen Formel. Dann folgen im fünften Kapitel die Sätze über unendliche numerische und Funktionalreihen. Die Theorie der Taylorschen Reihe wird über den gewöhnlichen Rahmen hinaus bis zum Bernsteinschen Satz verfolgt. Dann werden die trigonometrischen Funktionen, die mit ihrer geometrischen Definition vorläufig schon erwähnt wurden, mit aller mathematischen Strenge durch ihre Potenzreihen definiert. Es ist allerdings zu bemerken, daß hier die Zahl  $\pi$  als die kleinste positive Nullstelle der Funktion  $\sin x$  definiert wird, der Beweis aber, daß eine solche Nullstelle überhaupt existiert, fehlt. Die folgenden zwei Kapitel behandeln die Definition und die Eigenschaften des Riemannschen Integrals und seinen Zusammenhang mit der Differentialrechnung, sowie die Regeln vom Rechnen mit Differentialen, die als „Ableitungen nach einem unbestimmten Parameter“ aufgefaßt werden. — Die übrigen drei Kapitel beschäftigen sich mit den Funktionen von zwei Veränderlichen und den Abbildungen zweidimensionaler Mengen. Dabei wird die Funktion  $f(x, y)$  differenzierbar genannt, wenn sie mit stetigen partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  versehen ist, was allerdings die Formulierung der Ergebnisse oft bequem macht. Die Eigenschaften der Kurven- und Gebietsintegrale werden so weit verfolgt, daß man die Gaußformel in der Ebene unter günstigen Annahmen über die Randkurve beweisen kann. Császár.

Riesz, F.: L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue. Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 1, 29—42 (1950).

In sehr interessanter Weise wird die Entwicklung der Lebesgueschen Integraltheorie skizziert, woran Verf. bekanntlich hervorragend beteiligt ist. Dabei bespricht Verf. insbesondere auch die verschiedenen Wege, auf denen man, ausgehend von einem „elementaren Integral“, d. h. allgemein zu reden von einem linearen Funktional, mittelst Grenzwertbildung aus „elementaren“ Funktionen zum Lebesgueschen Integral bzw. dessen Verallgemeinerung gelangt, d. h. das lineare Funktional erweitert. Die neueste Literatur wird gestreift. Haupt (Erlangen).

Eggleston, H. G.: A characteristic property of Hausdorff measure. J. London math. Soc. 25, 39—46 (1950).

Man bezeichne mit  $h(x)$  eine für  $x \geq 0$  definierte, stetige, streng wachsende Funktion mit  $h(0) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow +0} h(\alpha x)/h(x) > 0$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Ist ein separabler, metrischer Raum  $X$  gegeben, so definiert man für  $E \subset X$  h. m.  $E = \lim_{\delta \rightarrow 0} A_h(E, \delta)$ , wo  $A_h(E, \delta)$  die untere Grenze der Summe  $\sum_{Y \in \mathfrak{S}} h(d(Y))$  bedeutet,  $\mathfrak{S}$  alle Systeme von Mengen  $Y$  mit  $d(Y) < \delta$  und  $E \subset \sum_{Y \in \mathfrak{S}} Y$  durchläuft und  $d(Y)$  den Durchmesser von  $Y$  bezeichnet. Es wird nun bewiesen, daß es für  $0 < \text{h. m. } A < +\infty$  und  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  eine Menge  $B \subset A$  und eine Zahl  $\delta > 0$  gibt mit h. m.  $(A - B) < \varepsilon$  und h. m.  $(B \cap Y) \leq (1 + \eta) h(d(Y))$  für  $d(Y) < \delta$ ,  $Y \subset X$ . Das ist die Verallgemeinerung eines Resultates von Besicovitch und Moran [J. London math. Soc. 20, 110—120 (1945)]. Diese Eigenschaft des Hausdorffschen Maßes h. m.  $E$  ist im folgenden Sinne charakteristisch: ist  $\Phi(M)$  ein äußeres Maß im Sinne von Carathéodory, definiert für die Mengen  $M$  einer additiven Klasse  $\mathfrak{M}$ ,



die die in  $A$  offenen Mengen enthält, und gibt es für  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  eine Menge  $B \subset A$  und eine Zahl  $\delta > 0$  mit  $\Phi(A - B) < \varepsilon$  und  $\Phi(BY) \leq (1 + \eta) h(d(Y))$  für  $Y \subset X$ ,  $d(Y) < \delta$ , gilt endlich  $\Phi(A) = \text{h. m. } A$ , so gilt für  $A_1 \subset A$ ,  $A_1 \in \mathfrak{M}$  und  $A_1$   $h$ -meßbar  $\Phi(A_1) = \text{h. m. } A_1$ . Daraus ergibt sich ein Zusatz über die  $\Phi$ -Dichte von  $h$ -meßbaren Mengen. Császár (Budapest).

**Radó, Tibor:** The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 530—555 (1947).

Es bezeichne  $S$  die Einheitssphäre  $|\beta| = 1$  im gewöhnlichen Raum, und es sei  $C$  das durch  $P = f(p)$  ( $p \in S$ ,  $P \in [C]$ ) erzeugte eindeutige stetige Bild (orientierte Fläche im Sinne von Fréchet), wobei  $C$  von der Bildpunktmenge  $[C]$  zu unterscheiden ist. Einem beliebigen Punkt  $P \notin [C]$  ist nun ein topologischer Index  $i(P)$  zugeordnet, der ganzzahlige positive oder negative Werte annimmt innerhalb der Komponenten, in welche der Raum durch  $[C]$  zerlegt wird, konstant ausfällt und außerhalb einer ausreichend großen Kugel verschwindet. Dieser Index läßt sich als Grad derjenigen stetigen Abbildung von  $S$  in eine weitere Einheitssphäre  $T$ ,  $|t| = 1$ , erklären, die dadurch entsteht, daß man dem Punkt  $p \in S$  den Richtungs-einheitsvektor  $t$  des Differenzvektors  $\tau\{P\} - \tau\{f(p)\}$  zuordnet. — Das im erweiterten algebraischen Sinn verstandene, von  $C$  umschlossene Volumen ist durch das sich über den ganzen Raum erstreckende Integral  $V' = \int i(P) dP$  gegeben, wobei  $dP$  das Volumendifferential bedeutet, und die Existenz im Lebesgueschen Sinn vorausgesetzt wird. — Verf. führt nun durch den Ansatz  $V = \int |i(P)| dP$  ein absolutes Volumen ein und führt den Beweis, daß an Stelle der gewöhnlichen Form der isoperimetrischen Ungleichung  $36\pi V'^2 \leq A^3$  die im allgemeinen schärfere absolute Form  $36\pi V^2 \leq A^3$  gilt. Hierbei bedeutet  $A$  den Lebesgueschen Flächeninhalt von  $C$ . Die Beweiskonstruktion führt über Dreieckspolyederflächen durch sorgfältige Diskussion notwendiger Grenzübergänge zum Ziel. Hadwiger.

**Radó, T. and P. V. Reichelderfer:** On  $n$ -dimensional concepts of bounded variations, absolute continuity and generalized Jacobian. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 675—681 (1949).

Es seien  $U^n$ ,  $X^n$  euklidische Räume mit Punkten  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $f: U^n \rightarrow X^n$  eine eindeutige (nicht notwendig eineindeutige) stetige Abbildung. Eine  $n$ -dimensionale Definition für die wesentliche, absolute Vielfachheitsfunktion  $k(x, f, U^n)$  wurde kürzlich von H. Federer (dies. Zbl. **32**, 149) nach den Begriffen der Čechschen Kohomologietheorie vorgeschlagen, als Ausdehnung der entsprechenden Definitionen, welche auf elementare Weise für  $n = 1$  T. Radó [s. Length and area; dies. Zbl. **33**, 170] und Ref. [s. Boll. Un. mat. Ital. II. S. **4**, 109—117 (1942); dies. Zbl. **26**, 308] eingeführt haben. Die Abbildung wird eBV genannt, wenn  $K(x, f, U^n)$   $L$ -integrierbar ist. — Verff. führen in vorliegender Arbeit Definitionen der positiven, negativen und relativen Vielfachheitsfunktionen  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $\mu$  ein, und es gilt  $K = K^+ + K^-$ ,  $\mu = K^+ - K^-$ ,  $K^+ \geq 0$ ,  $K^- \geq 0$ . Für jedes Intervall  $q \subset U^n$  sei  $F(q)$  das  $L$ -Integral von  $\mu(x, f, q)$  im Raum  $X^n$ . Dann ist die verallgemeinerte Funktionaldeterminante  $J(u)$  fast überall in  $U^n$  die Derivierte von  $F(q)$  als Intervallfunktion in  $U^n$ . Durch Ausdehnung des Begriffes der Menge  $E$ , der Summe der wesentlichen maximalen stetigen Urbilder von  $x$ , wird  $f$  eAC genannt dann und nur dann, wenn für jede meßbare Menge  $I \subset U^n$  die Beziehung  $|IE| = 0$ ,  $|f(IE)| = 0$  einschließt. Anwendungen der Transformation  $n$ -facher Integrale werden in einer späteren ausführlicheren Arbeit gegeben [für  $n = 2$  vgl. T. Radó und P. Reichelderfer, Trans. Amer. math. Soc. **49**, 258—307 (1941); dies. Zbl. **24**, 387; Ref., dies. Zbl. **33**, 54]. L. Cesari (Bologna).

**Reichelderfer, Paul V.:** On the semicontinuity of double integrals. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 275—285 (1949).

Betrachten wir die Klasse  $C$  aller stetigen orientierten Oberflächen  $S$  der

Raumes  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , welche eine eAC-Abbildung (s. oben)  $x = x(u)$ ,  $u \in R$ , besitzen, wobei  $R$  ein Jordan-Gebiet ist. Wenn  $x = x(u)$ ,  $u \in R$ , eine solche Abbildung einer Oberfläche  $S$  ist, dann existieren die verallgemeinerten Funktionaldeterminanten  $J_r(u)$ ,  $r = 1, 2, 3$ , fast überall in  $R_0$ , und die Lebesgue-Fläche von  $S$  stimmt mit dem klassischen Integral  $L(S) = \iint_{R_0} |J| du$ ,  $J = (J_1, J_2, J_3)$ , überein

(T. Radó, Length and area, dies. Zbl. 33, 170; Ref., Boll. Un. mat. Ital., II. S. 4, 109—117 (1942); dies. Zbl. 26, 308; Mem. Accad. Italia 13, 1323—1481 (1943)).

Es sei  $f(x, X)$ ,  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , eine Funktion von  $x, X$ , welche mit ihrer ersten Derivierten  $f_r$  in bezug auf  $X_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , stetig ist und welche der Beziehung  $f(x, tX) = tf(x, X)$  für alle  $t \geq 0$  genügt. Es sei  $E$  die Weierstraßsche Funktion

$E = E(x, X, X) = f(x, X) - \sum X_r f_r(x, X)$  und  $I(S)$  das Integral  $I(S) = \iint_S f(x, X) du$

auf der Oberfläche  $S$ . Das Hauptergebnis ist: Wenn a)  $S \in C$ ; b)  $f(x, X) \geq 0$  für jeden beliebigen Vektor  $X$  und jedes beliebige  $x$  einer offenen Punktmenge  $A \supset S$ ; c)  $E[x(u), J(u), X] \geq 0$  für fast alle  $u \in R_0$  derart, daß  $|J| \neq 0$ , und jeden beliebigen Vektor  $X$ , dann ist  $I(S)$  ein nach unten halbstetiges Funktional auf  $S$  mit bezug auf alle Oberflächen  $S \in C$ . — Wie Verf. erwähnt, stimmt die Klasse  $C$  mit der Klasse aller Oberflächen  $S$  mit  $L(S) < +\infty$ , nach einem Ergebnis des Ref. überein [Ref., Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. fis. mat. natur., VIII. S. 1, 509—515 (1946) und dies. Zbl. 31, 15]. Vorliegendes Ergebnis verallgemeinert eine frühere Arbeit von T. Radó [Trans. Amer. math. Soc. 51, 336—361 (1942); dies. Zbl. 27, 405] unter Anwendung dort gebrachter Begriffe und Methoden. (Eine analoge Untersuchung wurde von Ref. unter Anwendung ganz anderer Verfahren durchgeführt, dies. Zbl. 29, 291; 30, 390).  
L. Cesari (Bologna).

Scott, W. R.: Some elementary topological properties of essential maximal model continua. Bull. Amer. math. Soc. 55, 963—968 (1949).

Si  $T: z = t(w)$ ,  $w \in D$  est une transformation continue bornée du domaine plan  $D$  dans le plan  $z$ , et  $A$  est un ensemble du plan  $z$ , l'A. se propose d'étudier les propriétés topologiques de l'ensemble  $E(A)$ , réunion des continus-images essentiels des points de  $A$  (essential maximal continua de Radó et Reichelderfer, Trans. Amer. math. Soc. 49, 258—307 (1941); ce Zbl. 24, 387; Reichelderfer, ce Zbl. 32, 57). Après démonstration de 3 théorèmes valables pour des transformations entre espaces plus généraux, l'A. en déduit, pour le cas du plan, les résultats suivants: Si  $\kappa(z)$ , multiplicité essentielle de  $T$ , est semi-continue supérieurement sur  $A$  et  $\kappa(z) \leq k < +\infty$  pour  $z \in A$ ,  $E(A)$  est fermé si  $A$  est fermé, et  $E(A)$  possède  $k$  composantes si  $A$  est connexe; si  $z_1 \in A$ ,  $z_2 \in A$ , il existe  $w_1 \in E(z_1)$ ,  $w_2 \in E(z_2)$  et un arc  $C$  de  $w_1$  à  $w_2$  tel que  $T(C) \subset A$ . Une suite d'exemples permettent à l'A. de mieux préciser le sens de ses théorèmes.  
Calugareanu (Cluj).

Deniston, R. F.: Existence of Stieltjes integrals. I. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 1111—1119, 1120—1128 (1949).

Ridder, J.: Stieltjesche Integrale. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 1129—1134 (1949).

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien  $f$  beschränkt,  $g$  von beschränkter Variation in  $a \leq x \leq b$ . Das gewöhnliche (Riemann-) Stieltjesintegral beruht auf der Betrachtung der Intervallfunktion  $U(t', t'') = f(\xi)[g(t'') - g(t')]$ ,  $t' \leq \xi \leq t''$ . Läßt man nur  $\xi = t' (= t'')$  zu, führt dies ebenso zum links(rechts)-seitigen Cauchy-Stieltjesintegral. Ist  $t' < \xi < t''$ , erhält man die Definition von Dushnik. Es werden zwei Konvergenzbegriffe für die gemäß Wahl von  $U(t', t'')$  gebildeten Summen betrachtet: Konvergiert jede ausgezeichnete Summenfolge (d. h. Summen, welche für eine Folge von Einteilungen von  $[a, b]$  gebildet sind, deren Durchmesser gegen 0 strebt), dann mögen sie konvergent gegen ein normales Integral heißen. Zweitens: Wenn es zu jedem  $\delta > 0$  eine Einteilung  $D_\delta$  von  $[a, b]$  gibt, so daß für alle Weiterteilungen  $D$  von  $D_\delta$  gilt  $|S_D - L| < \delta$  ( $S_D$  die für die Einteilung  $D$  gebildete Summe), dann heißen die  $S$  konvergent gegen  $L$  im Moore-Smith-Sinne (i. MS. S.) und  $L$  das Pollard-Moore-Integral (PM. I.). [Für diese Begriffe und umfassende Literaturangaben (bis 1937) vgl. Hildebrandt, Amer. math. Monthly



45, 265—278 (1938); dies. Zbl. 19, 56.] Durch Kombination dieser Begriffe ergeben sich zahlreiche Möglichkeiten. Verf. zeigt u. a.: Damit das linksseitige Cauchy-Stieltjes-Integral (C. S.) im PM.-Sinne existiert, ist notwendig und hinreichend: In jedem Punkte, in welchem  $g$  linksseitig unstetig ist, existiert  $f(x-0)$  (A); die Menge der linksseitigen Unstetigkeiten von  $f$  ist eine Nullmenge bezüglich der totalen Variation der Stetigkeitsfunktion von  $g$ . Sinngemäß für das rechtsseitige Integral. [Für einen schwächeren Satz vgl. G. Price, Cauchy-Stieltjes und Riemann-Stieltjes integrals, Bull. Amer. math. Soc. 49, 625—630 (1943).] Um einen analogen Satz für das normale Integral aussprechen zu können, erweist sich der von Getchell (dies. Zbl. 11, 395) eingeführte Begriff der Pseudo-Additivität einer Intervallfunktion als nützlich. Verf. zeigt zunächst für  $U(t', t'')$  mit  $\xi = t'$  die Äquivalenz der Pseudoadditivität mit der Forderung: In jedem rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt von  $g$  ist  $f$  linksseitig stetig. Darauf beruht der Satz: Für die Existenz des linksseitigen (C. S.) Normalintegrals ist notwendig und hinreichend: Gültigkeit von (A), und die Menge der linksseitigen Unstetigkeitspunkte von  $f$  ist eine Nullmenge bezüglich der linksseitigen Stetigkeitsfunktion von  $g$  (d. i.  $g$  nach „Abzug“ der Linksunstetigkeiten). [Vgl. H. Schaerf, Über links- und rechtsseitige Stieltjes-Integrale, Portugaliae Math. 4, 73—118 (1943/44).] Für das gewöhnliche Stieltjes-Integral im PM.-Sinne erhält Verf.: Notwendig und hinreichend für die Existenz ist, daß  $f$  in der Umgebung jeder Unstetigkeitsstelle von  $g$  stetig ist und daß die Unstetigkeitspunkte von  $f$  eine Nullmenge bezüglich der Stetigkeitsfunktion von  $g$  bilden. Weitere Sätze für das Dushnik-Integral (D.-I.) im PM.-Sinne und für das normale D. I. — Im Anschluß hieran führt Ridder den Begriff der  $\varepsilon$ -Teilung eines Intervalls in bezug auf eine Funktion  $g$  ein: Jede Unstetigkeitsstelle  $x$  von  $g$  heiße ein Doppelpunkt. Man denke sich zwei uneigentliche Punkte  $x-0, x+0$ , welche mit  $x$  zusammenfallen, und setze  $g(\overline{x+0}) - g(\overline{x-0})$ . Die Anordnungsrelation  $\xi_1 < x < \xi_2$  kann widerspruchsfrei zu  $\xi_1 < x-0 < x < x+0 < \xi_2$  erweitert werden.  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  heißt  $\varepsilon$ -Teilung bezüglich  $g$ , falls die  $x_j$  eigentliche oder zu einem Doppelpunkt von  $g$  gehörige Punkte  $x-0, x+0$  sind, zu jedem Doppelpunkt mit  $V(\overline{x+0}) - V(\overline{x-0}) \geq \varepsilon$  ( $V = \int_a^x |dg|$ )

$x-0, x, x+0$  drei aufeinanderfolgende Einteilungspunkte sind und sonst  $V(x_{j+1}) - V(x_j) < \varepsilon$  gilt.  $f$  sei endlich und in den Doppelpunkten bezüglich  $g$   $f(x \pm 0) = f(x)$ . Betrachtet man wieder die Summen  $\sum_1^n f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$  (gemäß irgendeiner Intervallfunktion  $U$ ) und setzt man

voraus, daß sie zu einer  $\varepsilon$ -Teilung bezüglich  $g$  gehören, dann kann man einerseits Grenzwertuntersuchungen für  $\varepsilon \rightarrow 0$  machen (normales Integral im Falle der Konvergenz), aber auch sinngemäß den Begriff der Konvergenz i. MS. S. definieren. Um diese Begriffe vom Vorhergehenden zu unterscheiden, wollen wir „im Sinne Ridders“ (i. S. R.) hinzufügen. Wie vorhin ergeben sich eine Reihe von Sätzen, etwa: Für die Existenz des linksseitigen C. PM-Integralen i. S. R. ist notwendig und hinreichend, daß die Menge der linksseitigen Unstetigkeitspunkte von  $f$ , die nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von  $g$  sind, eine Menge vom  $V$ -Maß 0 bilden. Weitere Sätze für die verschiedenen Modifikationen des Stieltjes-Integralen i. S. R. Der Begriff der  $\varepsilon$ -Teilung zeitigt ein interessantes Ergebnis, wie in der Schlußbemerkung der Ridderschen Arbeit angeführt wird. Die Gestalt der Voraussetzungen der aufgestellten Sätze erlaubt mittels eines elementaren Ergebnisses der reellen Funktionentheorie die Feststellung, daß das C.-D. und gewöhnliche Stieltjes-Integral i. S. R., möge man sie als Normal- oder als PM-Integral betrachten, äquivalent sind. Der Integralwert fällt mit dem Lebesgue-Stieltjes-Integral zusammen. Aus den Sätzen von Deniston folgt, daß die von ihm betrachteten Integraldefinitionen nicht gleichwertig sind.

Schmetterer (Wien).

Koval', P. I.: Über Stieltjes-Integrale. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 6 (34), 190—193 (1949) [Russisch].

Es wird eine Definition eines Stieltjesschen Integralen gegeben, welche z. B. das Riemann-Stieltjes-(R. St.) Integral sowie die Definitionen von Fréchet (dies. Zbl. 14, 207) und Glivenko (siehe die bei Fréchet l. c. gegebenen Literaturangaben) umfaßt. Es liege für ein Intervall  $I$  ein System  $S$  von Einteilungen vor, das so beschaffen ist, daß es Einteilungen mit beliebig kleinem Durchmesser enthält (Durchmesser = Länge des größten Teilintervalles einer Einteilung) und außerdem mit irgend zwei Einteilungen  $e_1, e_2$  auch die Einteilung enthält, welche durch „Über-einanderlegen“ von  $e_1$  und  $e_2$  entsteht.  $F$  sei eine additive, nichtnegative Intervallfunktion von beschränkter Schwankung, welche für alle Teilintervalle aus  $S$  definiert ist.  $f$  sei auf  $I$  definiert und dort beschränkt,  $m_i = \inf_{\delta_i} f$ ,  $M_i = \sup_{\delta_i} f$  ( $\sum_1^n \delta_i = I$ ),  $S = \sup_S \sum m_i F(\delta_i)$ ,  $S = \inf_S \sum M_i F(\delta_i)$ . Wie üblich sei  $J = \int_I f(x) F(dS)$ , wenn  $S = \bar{S} = J$ . Verf. gibt die unmittelbare Erweiterung auf Funktionen  $F$  beliebigen Vorzeichens sowie einige ganz einfache Eigenschaften des Integralen. — Ein Teilintervall  $\delta$  von  $I$  heiße benachbart bezüglich  $x$ , wenn

$x$  innerer oder Randpunkt von  $\delta$  ist. Die Anzahl der  $x$  benachbarten Intervalle einer Einteilung von  $I$  aus  $S$  heiße der Rang der Einteilung bezuglich  $x$ . (Da auch aus einem Punkt bestehende „Teilintervalle“ zugelassen werden, kann der Rang 1, 2 oder 3 sein.) Wenn wenigstens eine Folge bezuglich  $x$  benachbarter Intervalle  $\delta_i$  mit  $\delta_i > \delta_{i+1}$  und Länge von  $\delta_i \rightarrow 0$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\delta_n) \neq 0$  existiert, soll  $x$  etwa Sprungstelle von  $F$  heißen. Eine Folge von Einteilungen

$e_1, e_2, \dots \in S$  soll erlaubt bezuglich  $F$  genannt werden, wenn der Durchmesser der Einteilungen  $\rightarrow 0$  strebt und fast alle  $e_i$  bezuglich der Sprungstellen von  $F$  den Maximalrang besitzen, den überhaupt eine Einteilung aus  $S$  bezuglich dieser Stellen besitzt. Nun gilt:  $e_n$  sei erlaubt bezuglich  $F$ .  $\int_I fF(dS)$  existiert genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{e_n} f(\xi_i)F(\delta_i)$ ,  $\xi_i \in \delta_i$ , vorhanden ist. Die

Werte stimmen überein. Ein weiterer Satz deckt sich bei Spezialisierung auf das R. St.-Integral mit den diesbezuglichen Sätzen bei Deniston (vgl. vorsteh. Ref.) Schließlich gibt Verf. eine axiomatische Einführung des von ihm entwickelten Integralbegriffes. Keine Beweise.

Schmetterer (Wien).

Dinghas, Alexander: Verallgemeinerung eines Hilbertschen Satzes über das Verhalten einer mit den Legendreschen Polynomen zusammenhängenden quadratischen Form. S.-B. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Math.-naturw. Kl. 1948, Nr. II, 12 S. (1948).

Verf. beweist: Ist  $P_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten und  $(a, b)$  ein reelles Intervall mit  $b - a < 4$ , so kann durch geeignete Wahl der Koeffizienten und der Zahl  $n$  das Integral

$$\int_a^b (x-a)^{\gamma-1} (b-x)^{\beta-1} P_n^2(x) dx, \quad \gamma > 0, \beta > 0,$$

beliebig klein gemacht werden. Hilbert hat [Acta math., Stockholm 18, 155—159 (1894)] den Satz im Fall  $\gamma = \beta = 1$  bewiesen, und zwar sieht er dabei das Integral als quadratische Form der Koeffizienten an, berechnet deren Diskriminante und schtzt dann den Wert der Form mittels eines Minkowskischen Satzes ab. Verf. behält diesen Grundgedanken des Beweises bei, berechnet aber die fraglichen Diskriminante auf einem anderen Wege als Hilbert unter Benutzung der Jacobischen Polynome. Er erhält

$$|g_{ik}|_n = (b-a)^{n(\gamma+\beta-1)+n^2} \cdot \prod_0^{n-1} \frac{\nu! \Gamma(\gamma+\beta-1+\nu) \Gamma(\gamma+\nu) \Gamma(\beta+\nu)}{\Gamma(\gamma+\beta-1+2\nu) \Gamma(\gamma+\beta+2\nu)},$$

wobei

$$g_{ik} = \int_a^b (x-a)^{\gamma-1} (b-x)^{\beta-1} x^{i+k-2} dx$$

ist.

W. Hahn (Berlin).

Taylor, A. E.: A note on an inequality for integrals. Amer. math. Monthly 57, 93—96 (1950).

Wie sofort einleuchtet, gilt  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$  für reelle Funktionen dann und nur dann, falls  $f(x)$  das Vorzeichen in  $(a, b)$  nicht wechselt und für komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen dann und nur dann, falls alle in  $(a, b)$  angenommenen Funktionswerte auf einer vom Ursprung ausgehenden Halbgeraden der komplexen Zahlenebene liegen. — Als Verallgemeinerung beweist Verf., daß, falls  $f(x)$  eine stetige Funktion ist, deren Definitionsbereich das reelle Intervall  $(a, b)$  ist und deren Wertevorrat in einem Banach-Raum liegt, wo die Einheitskugel streng konvex ist,  $\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| = \int_a^b \|f(x)\| dx$  dann und nur dann gelten wird, wenn alle Werte von  $f(x)$  nichtnegative Vielfache eines einzigen Vektors im Banach-Raum sind. Der Satz läßt sich auch auf unendliche  $b$  bzw.  $a$  erweitern. Der Beweis ist äußerst einfach und beruht auf der Äquivalenz der ursprünglichen Gleichung mit



$||\Sigma f(x_i)|| = \Sigma ||f(x_i)||$  für  $x_i \in (a, b)$  unter den gegebenen Bedingungen. Diese Äquivalenz besteht auch, falls die Einheitskugel nicht konvex ist, dagegen zeigt Verf. an einem Gegenbeispiel, daß der ursprüngliche Satz in diesem Falle nicht mehr zu gelten braucht. *Aczél* (Miskole).

**Jansa, José Maria:** Verallgemeinerung der Ableitungsregel der inversen Funktionen auf zwei Variable. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 7, 213—216 (1947) [Spanisch].

**Fomin, A. M.:** Über eine hinreichende Bedingung für den Homöomorphismus einer stetig differenzierbaren Abbildung. *Uspechi mat. Nauk* 4, Nr. 5 (33), 198—199 (1949) [Russisch].

Verf. beweist in sehr einfacher Weise folgenden Satz: Gegeben sei die durch die stetig differenzierbaren Funktionen  $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) vermittelte Abbildung des Gebietes  $S$  des euklidischen  $x$ -Raumes auf das Gebiet  $T$  des  $y$ -Raumes, so ist eine hinreichende Bedingung für die umkehrbare Eindeutigkeit dieser Abbildung, daß die Form  $\sum_{i,j} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} x_i x_j$  überall in  $S$  definit ist und ihre Determinante dort nirgends verschwindet. Die gewöhnlich herangezogene Funktionaldeterminante garantiert bei ihrem Nichtverschwinden bekanntlich nur die Eineindeutigkeit im Kleinen. *Bureau* (Hamburg).

**Banerjee, D. P.:** On the zeros of a non-differentiable function. *Bull. Calcutta math. Soc.* 40, 145—146 (1948).

Es handelt sich um die von Hobson eingeführte stetige, nichtdifferenzierbare Funktion

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin b^n x \quad (a < 1, \quad b = 4p + 1, \quad p \text{ ganz}, \quad ab > 1 + 3\pi/2).$$

Es wird bewiesen, daß  $w(x)$  zwischen  $\pi/b^k$  und  $3\pi/2b^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) mindestens eine Nullstelle hat. Die übrigen Behauptungen sind teils falsch, teils trivial.

*Császár* (Budapest).

**Timan, A. F.:** Quasi-glatte Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 70, 961—963 (1950) [Russisch].

A. Zygmund hat einige, in der Theorie der reellen Funktionen eine wichtige Rolle spielende Funktionenklassen definiert [Duke Math. J. 12, 47—76 (1945)]. Verf. gibt eine weitere Klassifizierung der Zygmundschen Klasse  $\Lambda^*(a, b)$  an:  $f(x) \in \Lambda^*(a, b; M)$ , wenn (1)  $|f(x_1) - 2f(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)) + f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$  für alle Paare  $a \leq x_1, x_2 \leq b$  gilt. Er kann so das Zygmundsche Resultat folgendermaßen verallgemeinern: Es sei  $\omega(f, h) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$ , wo die obere Grenze für alle  $a \leq x_1, x_2 \leq b$  und  $|x_1 - x_2| \leq h$  befriedigende  $x_1, x_2$  gebildet ist. Für stetige  $f(x) \in \Lambda^*(a, b; M)$  und  $0 < h \leq \frac{1}{4}(b - a)$  gilt dann  $\omega(f, h) \leq M(\log 2)^{-1} h \log h^{-1} + Ah$ , wo  $A$  eine von  $\max |f(x)|$  abhängende (genaue) Konstante bedeutet. — Aus dem Beweisgang sind nur einige Teilresultate mitgeteilt; die Hauptschwierigkeit liegt wahrscheinlich im Beweis des folgenden Lemmas. Bezeichne  $\varphi(\xi)$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ , die gerade und stückweise lineare Funktion, die in den Punkten  $\xi = 3^{-1}2^{-(n+1)}$  und  $\xi = 1 - 3^{-1}2^{-(n-1)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , die Werte  $1 + (n+2)\xi$  bzw.  $(n+2)(1-\xi)$  hat. Wenn  $f(a) = f(b) = 0$  und (1) gilt, dann folgt

$$|f(x)| \leq \frac{(b-a)M}{2} \varphi\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \leq \frac{2(b-a)M}{3}$$

für alle  $a \leq x \leq b$ . Aus diesem Lemma folgt die Behauptung: Sei  $\psi(\xi)$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ , jene stückweise lineare und gerade Funktion, für die  $\psi(1 - 2^{-n}) = (n+1)2^{-n}$ . Für alle  $a \leq x \leq b$  gilt dann  $\sup |f(x)| = \frac{(b-a)M}{2} \psi\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ , wofern  $\sup(f)$  die obere Grenze für alle (1),  $2|f(x)| \leq (b-a)M$  und  $f(a) = f(b) = 0$  befriedigenden  $f(x)$  bezeichnet. *Gál* (Paris).

**Hirschman jr., I. I.:** On the behaviour of Fourier transforms at infinity and on quasianalytic classes of functions. Amer. J. Math. **72**, 200—213 (1950).

1. Let  $\Phi(t) e^{i|\theta(t)|} = \Psi(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ , where  $0 \leq \theta(t) \leq M$ . Write  $f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-A}^A e^{ixt} \Phi(t) dt$  and  $H(r) = \pi^{-1} \int_{-r}^r |t| \theta(t) [1+t^2]^{-1} dt$ . Suppose that  $H(r) \rightarrow \infty$  for  $r \rightarrow \infty$  and  $f(x) = O(e^{-L(x)})$  as  $x \rightarrow +\infty$ , where for  $x$  large  $L(x) > 0$  and  $L(x)/x \uparrow +\infty$ . If  $\lim_{r \rightarrow \infty} H[L(r)] r^{-1} > 1$ , then  $f(x) = 0$  almost everywhere. 2. If  $0 \leq \theta(t) \leq M$ ,  $t\theta(t) \uparrow$ ,  $H(r) \rightarrow \infty$  for  $r \rightarrow \infty$ , then there exists  $\Phi(t)$ , not equivalent to zero, such that  $|\Phi(t)| e^{|\theta(t)|} \leq [1+t^2]^{-1}$  and that  $f(x) = O(\exp -H^{-1}[(1+\varepsilon)x])$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) for every  $\varepsilon > 0$ . — 3. Let  $M_n > 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $M_n^{1/n} \geq b$  ( $b > 0$ ). Denote by  $C\{M_n\}$  the class of infinitely differentiable functions  $\varphi(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) such that  $|\varphi^{(n)}(x)| \leq A k^n M_n$  ( $-\infty < x < \infty$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) with  $A$  and  $k$  depending on  $\varphi(x)$ . Put  $T(r) = \max_{n \geq 1} (r^n / M_n)$  and suppose that

$$K(r) = (2/\pi) \int_r^\infty \log T(u) u^{-2} du \rightarrow \infty \text{ as } r \rightarrow \infty,$$

which implies that  $C\{M_n\}$  is quasi-analytic. Suppose now that  $|\varphi^{(n)}(x)| \leq A k^n M_n$  for a certain  $k > 0$ . If  $\varphi(x) = O(e^{-M(x)})$ , where  $0 < M(x) \uparrow \infty$ , and if  $\lim_{x \rightarrow \infty} K[M(x)] x^{-1} > k$  then  $\varphi(x) \equiv 0$ . Conversely there exists a function satisfying  $|\varphi^{(n)}(x)| \leq A k^n M_n$  such that  $\varphi(x) = O(\exp -K^{-1}(k'x))$  for every  $k' < k$ .  
Horváth (Paris).

**Bochner, S.:** Quasi-analytic functions, Laplace operator, positive kernels. Ann. Math., Princeton, II. S. **51**, 68—91 (1950).

Let  $V_k$  be a compact Riemannian manifold with the metric  $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$ . Consider the operator  $\Delta f = -\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ , which has the eigenvalues  $\lambda_r \uparrow \infty$ ; associate with each  $\lambda_r$  an orthogonal set of eigenfunctions  $\varphi_{rv}(x)$ ,  $v = 1, \dots, \mu_r$ , where  $\mu_r$  is the multiplicity of  $\lambda_r$ . Every function  $f(x) \in L^2$  has a unique expansion  $f(x) \sim \sum_{r=0}^\infty \Phi_r(x)$ ,  $\Phi_r(x) = \sum_{v=1}^{\mu_r} c_{rv} \varphi_{rv}(x)$ . Call a set  $U$  a set of determination of  $\Delta$  if every function  $\varphi_{rv}$  which vanishes on  $U$  vanishes identically. Writing  $\Phi_r(x, y) = \sum_{v=1}^{\mu_r} \varphi_{rv}(x) \varphi_{rv}(y)$  introduce the kernel

$$G_\varrho(x, y, t) = \sum_{r=0}^\infty e^{-\lambda_r^\varrho t} \Phi_r(x, y).$$

Then: 1. For  $0 < \varrho \leq 1$  and  $0 < t < \infty$  we have  $G_\varrho(x, y, t) \geq 0$ . 2. For  $f(x)$  infinitely differentiable put  $\Delta^\varrho f \sim \sum_{r=0}^\infty \lambda_r^\varrho \Phi_r(x)$  and  $m_{2\varrho n} = \max_{x \in V_k} |(\Delta^\varrho)^n f|$

( $n = 1, 2, \dots$ ). If  $\sum_{n=1}^\infty m_{2\varrho n}^{-1/n} = \infty$  and  $(\Delta^\varrho)^n f(\xi) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) for all  $\xi \in U$ ,

$U$  being a set of determination of  $\Delta f$ , then  $f \equiv 0$ . This generalises the classical theorem of Denjoy-Carleman on quasi-analytic functions. — Extensions for non-compact manifolds, among them Siegel's matrix space, are indicated and the connection between the above results and the Hadamard-Hardy three circles theorem is explicated.  
Horváth (Paris).

**Good, I. J.:** A proof of Liapounoff's inequality. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 353 (1950).

Let  $\mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x)$  where  $F(x)$  is non-decreasing. The au. proves the known result that  $\log \mu_k$  is a convex function of the parameter  $k$ .  
Horváth (Paris).



### Allgemeine Reihenlehre:

Scott, W. T.: The corresponding continued fraction of a  $J$ -fraction. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 56—67 (1950).

Verf. behandelt die Zusammenhänge zwischen einem  $J$ -Kettenbruch und dem zugehörigen korrespondierenden Kettenbruch. Zunächst wird gezeigt, daß zu der Potenzreihe

$$F(z) = f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} - \dots$$

dann und nur dann ein  $J$ -Kettenbruch

$$\frac{a_0^2}{z + b_1} - \frac{a_1^2}{z + b_2} - \frac{a_2^2}{z + b_3} - \dots$$

existiert, wenn der zugehörige korrespondierende Kettenbruch ( $C$ -Kettenbruch) die Form

$$\frac{c_0}{z^{\delta_1}} - \frac{c_1}{z^{\delta_2}} - \frac{c_2}{z^{\delta_3}} - \dots$$

mit

$$\delta_1 = 1, \delta_p \text{ gleich } 0 \text{ oder } 1, \delta_p + \delta_{p+1} > 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

hat. — Die Klasse der  $C$ -Kettenbrüche, deren formale Potenzreihen auch  $J$ -Kettenbruchentwicklungen zulassen, wird vollständig charakterisiert. Ferner werden die Beziehungen zwischen den Näherungszählern und Näherungsnennern von  $C$ - und  $J$ -Kettenbrüchen mit derselben formalen Potenzreihenentwicklung abgeleitet. Weiter werden die Zusammenhänge der  $C$ -Kettenbrüche mit dem Momentenproblem behandelt und die Bedingungen für die Lösbarkeit des Momentenproblems durch die Koeffizienten der zugehörigen  $C$ -Kettenbruchentwicklung ausgedrückt. Im nächsten Abschnitt befaßt sich Verf. unter Benutzung bereits bekannter Ergebnisse von Hellinger und Wall mit Konvergenzeigenschaften der  $C$ -Kettenbrüche. — Im folgenden Abschnitt untersucht Verf. die Konvergenz der positiv definiten  $C$ -Kettenbrüche näher. Ein  $C$ -Kettenbruch

$$\frac{1}{d_1 z^{\delta_1}} - \frac{1}{d_2 z^{\delta_2}} - \frac{1}{d_3 z^{\delta_3}} - \dots$$

heißt dabei positiv definit, wenn

$$d_p > 0 \text{ für } \delta_p = 1, \Im(d_p) \geq 0 \text{ für } \delta_p = 0.$$

Insbesondere werden die Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz des positiv definiten  $C$ -Kettenbruchs in irgendeinem beschränkten Bereich innerhalb  $\Im(z) > 0$  ermittelt. — Es wird außerdem gezeigt, daß der zu einem positiv definiten  $C$ -Kettenbruch gehörige  $J$ -Kettenbruch ebenfalls positiv definit ist. Schließlich zeigt Verf., daß jede in einem abgeschlossenen Bereich innerhalb von  $\Im(z) > 0$  konvergierende Teilfolge der Näherungsbrüche eines  $C$ -Kettenbruchs gegen ein Stieltjesches Integral konvergiert, dessen Wachstumsfunktion zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  variiert. — Im letzten Abschnitt führt Verf. einige Konvergenzbetrachtungen an dem Kettenbruch

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} - \dots$$

durch, indem er die vorher gewonnenen Ergebnisse und früher gewonnene eigene Ergebnisse nebst Ergebnissen von Wall benützt. Zusammenfassend ist zu sagen: Verf. klärt in dieser Schrift den Zusammenhang zwischen zugeordneten  $C$ - und  $J$ -Kettenbrüchen. Teilergebnisse über diese Kettenbrüche wurden jedoch schon von Grommer, Perron, Wall und anderen früher gewonnen. Joseph Mall.

Birindelli, C.: 'Sopra recenti metodi di sommazione per le serie semplici estesi alle serie multiple. Portugaliae Math. 6, 1—32 (1947).

L'A. estende alle serie doppie di potenze i procedimenti di sommazione ( $f, g$ ) di

Gronwall, generalizzando i risultati dati del Gronwall e dal recensore per le serie semplici. — Data la serie doppia  $(1) \sum_{\mu, \nu}^{0 \dots \infty} u_{\nu \mu}$  e dette  $z = f(w)$ ,  $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$  due funzioni analitiche (soddisfacenti e opportune condizioni), diremo la serie (1) sommabile  $(f, g)$  se le quantità  $u_{mn}$  definite dall'identità

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{\mu, \nu}^{0 \dots \infty} u_{\nu \mu} z_1^{\nu} z_2^{\mu} = \frac{1}{g(w_1)g(w_2)} \sum_{m, n}^{0 \dots \infty} b_m b_n u_{mn} w_1^m w_2^n$$

tendono a uno limite finito  $s$  quando  $\left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty$ . Tra i teoremi dimostrati dall'A. ricordiamo il seguente. Sia  $D$ , nel piano  $z$ , il campo che  $z = f(w)$  [ $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ] rappresenta conformemente nel cerchio  $|w| < 1$  e in modo continuo nel cerchio  $|w| \leq 1$ . Se la frontiera  $l$  di  $D$  è una linea  $l$  rettificabile e  $\varphi(z_1, z_2)$  è analitica per  $z_1, z_2$  in  $D$ , continua anche su  $l$  si ha  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} u_{mn} = \varphi(1, 1)$ , quando

sia  $|u_{mn}| < K$ ,  $g(w) = (1-w)^{-2}$ . — Altri risultati dell'A. si riferiscono all'estensione dei metodi di Picone e di Toeplitz, alle serie multiple. Si estende infatti un teorema di Picone sulla contrazione dell'intervallo di indeterminazione della quantità  $u_{mn}$  e il procedimento lineare di Toeplitz. *Luigi Amerio (Milano).*

**Agnew, R. P. and R. P. Boas jr.:** An integral test for convergence. *Amer. math. Monthly* **56**, 677—678 (1949).

Vereinfachter Beweis des Satzes von M. F. Egan: Wenn  $f(x)$  ( $f$  komplex,  $x$  reell) in  $0 \leq x < \infty$  von beschränkter Schwankung ist, so sind  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  und

$\int_0^{\infty} f(x) dx$  entweder beide konvergent oder beide divergent (vgl. auch dies. Zbl.

**33**, 111). *Th. Kaluza jr. (Braunschweig).*

**Parker, S. T.:** Summable series and integrals. *Amer. math. Monthly* **56**, 678—681 (1949).

Für Vorlesungszwecke gedachte rekursive Methode zur Konstruktion von  $(H, k)$  — aber nicht  $(H, k-1)$  — summierbaren Reihen und Integralen. *Th. Kaluza jr.*

**G.-Rodeja F., E.:** Summe der Glieder einer arithmetisch-geometrischen Progression. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 46—47 (1947) [Spanisch].

**Lázaro, Bernardo:** Nochmals die Summation von Reihen. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 88—93 (1947) [Spanisch].

**Mingot Shelly, José:** Zyklische Folgen von beliebiger Ordnung. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 249—252 (1947) [Spanisch].

**Morro Radmírez, Miguel A.:** Über die Summation einiger Reihen. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 253—255 (1947) [Spanisch].

**Masip, R.:** Reihen. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **8**, 116—125 (1948) [Spanisch].

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Merli, Luigi:** Sulla rappresentazione delle funzioni continue con una classe di polinomi interpolanti del tipo di Lagrange. *Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. **7**, 212—216 (1950).

Soit  $f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) continue. Désignons par  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n$ ) les zéros du polynôme de Tchebychef  $T_{2n} = \cos(2n \arccos x)$ . Soit  $P_n(x)$  le polynôme de degré  $\leq 2n-1$  qui vérifie  $P_n(x_{2k-1}^{(n)}) = P_n(x_{2k}^{(n)}) = f(x_{2k-1}^{(n)})$  ( $k = 1, \dots, n$ ), alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$  uniformément dans  $-1 \leq x \leq 1$ .  $P_n(x)$

se calcule moyennant une simple formule d'interpolation, analogue à celle de Lagrange. *Horváth (Paris).*



Alexits, Georges: Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynômes orthogonaux. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejer et F. Riesz LXX annos natis dedic., 223—225 (1950).

L'A. fondandosi unicamente sulle proprietà estremali delle somme parziali degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali prova in modo assai semplice e rapido il seguente teorema: Se  $\{p_n(x)\}$  è un sistema di polinomi  $ON$  in  $(-1, 1)$  rispetto alla funzione peso  $w(x)$  con  $0 \leq w(x) \leq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  ( $W = \text{costante}$ ) ed

$$(1) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x), \quad c_n = \int_{-1}^1 w(x) f(x) p_n(x) dx,$$

se

$$f(\cos \vartheta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\vartheta, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta,$$

allora se

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \log n)^2 < \infty,$$

la serie (1) è quasi ovunque convergente in  $(-1, 1)$ . — Ove alla (2) si sostituisca l'altra condizione

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$$

allora la (1) è sommabile  $(C, 1)$  quasi ovunque in  $(-1, 1)$ . Giovanni Sansone.

Boas jr., R. P.: The Charlier  $B$ -series. Trans. Amer. math. Soc. 67, 206—216 (1949).

Verf. betrachtet die Annäherung einer Funktion  $f(x) \in L^2$  durch lineare Ausdrücke von  $a_k^{(N)} \triangle^k \theta(x)$  sowie  $b_k^{(N)} \nabla^k \theta(x)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) im quadratischen Mittel  $M_N$ . Und zwar falls  $x$  I. sich stetig ändert, II. nur ganzzahlige Werte annimmt. Hierbei bezeichnet  $\triangle$  bzw.  $\nabla$  die Differenzbildung nach vorwärts bzw. rückwärts,

ferner  $\theta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixu} \varphi(u) du$ , d. h. bei I. eine Funktion, deren Fourier-Transformierte  $\varphi(u)$  für  $|u| > \pi$  verschwindet, bei II. die Fourier-Koeffizienten einer  $\varphi(u) \in L^2$  in  $(-\pi, \pi)$ . In beiden Fällen soll schließlich  $|\varphi(u)|$  in  $(-\pi, \pi)$  fast überall beschränkt sein. Im Falle I. ergibt sich bei geeigneten  $a_k^{(N)}, b_k^{(N)}$  für das Minimum von  $M_N$  die Null dann und nur dann, wenn die Fourier-Transformierte  $g(u)$  von  $f(x)$  für  $|u| > \pi$  fast überall verschwindet, und bei allen  $b_k^{(N)} = 0$  außerdem dann und nur dann, wenn die Fourier-Koeffizienten mit negativen Zeigern von  $g(u)/\varphi(u)$  verschwinden. Letztere Bedingung gilt für  $\min M_N = 0$  bei geeignetem  $a_k^{(N)}$  und  $b_k^{(N)} \neq$  oder  $= 0$  auch im Falle II., wenn  $\sum_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^2$  konvergiert und  $g(u)$

die Fouriersche Transformierte  $\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ixu} f(x)$  von  $f(x)$  bezeichnet. Die betrachteten Ausdrücke geben bei den Poissonschen  $\theta(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$  für ganze  $x \geq 0$  eine bessere Annäherung an  $f(x)$  als die Teilsummen der zu  $f(x)$  gehörenden Charlierschen  $B$ -Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangle^n \theta(x)$ . Die abschließenden vier Sätze geben übrigens Anhaltspunkte für die Konvergenz im quadratischen Mittel dieser Reihe gegen  $f(x)$  und zwar selbst für stetige  $x$  mit

$$\theta(x) = (2\pi)^{-1} e^{-\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{-ixu + \lambda e^{iu}\} du,$$

also mit einer Funktion, die für nichtnegative ganze  $x$ -Werte sich auf die Poissonsche reduziert. Szentmártony (Budapest).

Šnejder, A. A.: Über die Konvergenz der Teilfolgen der Partialsummen von Fourier-Reihen nach Walshschen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 969—971 (1950) [Russisch].

Without proofs, the author gives some theorems on Fourier series (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  for the orthonormal system (2)  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  of Walsh (this system is a completion of the Rademacher's system). A curious rôle in these theorems plays  $\eta(N)$ , the minimal number of non vanishing terms in the representation  $N = \sum_{i=0}^m \theta_i 2^i$ ,  $\theta_i = 0, +1, -1$  of an integer  $N$ . Clearly  $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta(N) = 1$ ,  $0 < \lim_{N \rightarrow \infty} [\eta(N)/\log_2 N] \leq 1$ . The author states that the Lebesgue constants of the system (2) are contained between  $3^{-1} \eta(N)$  and  $\eta(N)$  and gives an estimate for the partial sum  $S_N(x)$  of the Fourier series (1) of a function  $f \in L$  in terms of  $\eta(N)$ . There are also results about the convergence of sequences of partial sums  $S_{N_p}(x)$ . Thus (3)  $S_{N_p}(x) \rightarrow f(x)$  is true in every Lebesgue point  $x$  of  $f$  if  $N_p$  are chosen so that  $\eta(N_p) \leq A$ ; and if  $f \in L^2$ , there is a sequence  $N_p$  with  $N_{p+1}/N_p \rightarrow 1$  for which (3) holds. [The proof of the latter fact sketched by the au., depends upon particular properties of the system of Walsh. Ref. remarks that this result may be proved for any orthonormal system with the property that any Fourier series (1) of a function in  $L^2$  is almost everywhere  $C_1$  summable.] G. G. Lorentz.

Zamansky, Marc: Sur les classes de saturation des procédés d'approximation. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 695—696 (1949).

Verf. studiert den Grad der Approximation einer stetigen periodischen Funktion  $f(x)$  mit Fourierkoeffizienten  $a_k$ ,  $b_k$  durch Ausdrücke der Form

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^n g(k/n) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Die summatorische Funktion  $g$  heißt vom Typ  $p$ , wenn

$$g(0) = 1, \quad g(1) = g'(0) = \dots = g^{(p-1)}(0) = 0, \quad g^{(p)}(0) \neq 0$$

gilt,  $g^{(p+1)}(x)$  existiert und von beschränkter Schwankung ist. In diesem Fall ist die beste mögliche Approximation  $O(n^{-p})$ . Damit sie erreicht wird, ist es notwendig und hinreichend, daß  $f^{(p-1)} \in \text{Lip } 1$ , wenn  $p$  gerade, und  $\tilde{f}^{(p-1)} \in \text{Lip } 1$ , wenn  $p$  ungerade ist. Verf. gibt auch äquivalente Bedingungen dafür an, die nur gewisse Differenzenquotienten der Funktion  $f$  enthalten; er betrachtet auch summatorische Funktionen gebrochener Ordnung.

G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Derivative bases. Rev. Univ. nac. Tucumán A 7, 7—14 (1949).

Es wird bewiesen: Es sei  $f(t)$  eine für reelles  $t$  regulär-analytische Funktion der Periode  $2\pi$ . Die Funktionen  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(t)$ ,  $\dots$  bilden dann und nur dann eine Basis der stetigen Funktionen der Periode  $2\pi$  oder eine Basis von  $(L^2)$ , wenn in der Fourierreentwicklung  $f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imt}$  alle  $c_m \neq 0$  sind. Die Voraussetzung der Regularität und Analytizität kann auch durch die Quasianalytizität ersetzt werden. Außerdem dürfen endlich viele Ableitungen von  $f(t)$ , aber nicht  $f(t)$  selbst weggelassen werden. Alle  $f(t) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m\lambda} \cos mt$  mit  $0 < q < 1$  erfüllen für  $\lambda \geq 1$  die Bedingungen. Dagegen erzeugt ein solches  $f(t)$  mit  $0 < \lambda < 1$  keine Basis.

G. Köthe (Mainz).

Herrera, Félix Eduardo: On the equiconvergence of Fourier series and Fourier integrals. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1182—1190 (1949).

Sia  $f(x)$  misurabile in  $(-\infty, \infty)$  e sia convergente l'integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|} dt$ . Se



$f_a(x)$  è la funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , coincidente con  $f(x)$  in  $I_a = (a, a + 2\pi)$ , e

$$f_a(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$s_{\omega}(x, f_a) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \leq \omega} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\omega \geq 0);$$

$$S_{\omega}(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \omega t}{t} dt;$$

L'A. dimostra che per  $k = 1, 2, \dots$  la differenza  $d^k S_{\omega}(x, f)/dx^k - d^k s_{\omega}(x, f_a)/dx^k$  quando  $\omega \rightarrow \infty$  è uniformemente sommabile  $(C, k)$  e il suo valore è nullo in ogni intervallo chiuso interno ad  $I_a$ . Un risultato analogo vale sostituendo ad  $S_{\omega}(x, f)$ ,  $s_{\omega}(x, f_a)$  rispettivamente

$$S_{\omega}(x, f) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{1 - \cos \omega t}{t} dt$$

$$\bar{s}_{\omega}(x, f_a) = \sum_{n \leq \omega} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad (\omega \geq 1),$$

salvo che per  $\omega \rightarrow \infty$  il valore  $(C, k)$  della differenza  $d^k \bar{S}_{\omega}(x, f)/dx^k - d^k \bar{s}_{\omega}(x, f_a)/dx^k$  non è più necessariamente nullo. — Questi risultati per  $k = 0$  sono di A. Zygmund e P. Pi Calleja (questo Zbl. **12**, 349). Giovanni Sansone (Firenze).

**Mohanty, R.:** The absolute Cesàro summability of some series associated with a Fourier series and its allied series. J. London math. Soc. **25**, 63—67 (1950).

Sia  $f(t)$  periodica, di periodo  $2\pi$ , e sommabile  $L$ , e sia

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t), \quad A_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

la sua serie trigonometrica di Fourier. — Se per la funzione

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)],$$

e per un  $\alpha$  tale che  $0 < \alpha < 1$  risulta convergente l'integrale  $\int_0^{\pi} t^{-\alpha} |d\Phi(t)|$ , allora

la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} A_n(t)$  è nel punto  $t=x$  assolutamente sommabile  $[C, \beta]$  con  $\beta > \alpha$ . —

L'A. consegue la dimostrazione valendosi di un teorema di J. M. Hyslop [questo Zbl. **15**, 208] sull'equivalenza della sommabilità  $[C, \beta]$  e di quella assoluta di Riesz  $[R, w, \beta]$  per  $\beta > 0$ . Un teorema analogo è dimostrato per la serie coniugata

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} B_n(t)$ ,  $B_n(t) = b_n \cos nt - a_n \sin nt$  se per la funzione

$$\psi(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)]$$

si ha  $\psi(+0) = 0$ , e  $\int_0^{\pi} t^{-\alpha} |d\psi(t)| < \infty$ . — I due teoremi, come nota l'A., sono equivalenti a due altri di R. Salem e A. Zygmund [Trans. Amer. math. Soc. **59**, 23—41 (1946)]. Giovanni Sansone (Firenze).

**Mohanty, R.:** On the summability  $[R, \log w, 1]$  of a Fourier series. J. London math. Soc. **25**, 67—72 (1950).

L. S. Bosanquet e H. Kestelman [questo Zbl. **20**, 354] hanno provato che la sommabilità assoluta  $[C, 1]$  di una serie trigonometrica di Fourier di una funzione  $f(x)$ , periodica a periodo  $2\pi$ , sommabile, non presenta il fenomeno di Riemann, non dipende cioè unicamente dal comportamento di  $f(x)$  in un intorno comunque piccolo di  $x$ , o come si dice la sommabilità assoluta  $[C, 1]$  non è una proprietà locale. — L'A. dimostra che anche per la sommabilità assoluta di M. Riesz  $[R, \log w, 1]$  della stessa serie non vale il fenomeno di Riemann. Giovanni Sansone (Firenze).

## Funktionentheorie:

• **Borel, Émile:** *Leçons sur la théorie des fonctions*. 4. éd. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1950. XIII, 295 p.

Die vierte Auflage des bekannten Werkes unterscheidet sich von der dritten durch neu hinzugekommene Noten, speziell eine über das Auswahlaxiom und die asymptotischen Definitionen. Zusammen mit den am Schlusse angefügten Noten, die etwa die Hälfte des Buches einnehmen, gibt es eine Einführung elementaren Charakters in die Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der analytischen Funktionen und interessante Erörterungen über Grundlagenfragen. Inhalt: 1. Mengen, 2. algebraische Zahlen und Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, 3. perfekte und meßbare Mengen, 4. analytische Fortsetzung, 5. über die Konvergenz gewisser reeller Reihen, 6. Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen. Noten zur 1. Aufl.: Begriff der Kardinalzahl; Wachstum der Funktionen und die Zahlen der zweiten Klasse; allgemeiner Funktionsbegriff; Noten zur 2. Aufl.: Die Polemiken gegen das Transfinite; abzählbare Wahrscheinlichkeiten und ihre arithmetischen Anwendungen; Maß- und Integrationstheorie. Note zur 3. Aufl.: Für und gegen die empirische Logik. *Haupt* (Erlangen).

• **Turán, P.:** *Remark on a theorem of Fejér*. Publ. math., Debrecen 1, 95—97 (1949).

Es sei  $s_n(z) = s_n^{(0)}(z) = \sum_{\nu=0}^n z^\nu$ ,  $s_n^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^n s_\nu^{(k-1)}(z)$  für  $k = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, \dots$ , und  $A_n(z, \mu) = (d^\mu/dz^\mu) s_n^{(\mu)}(z)$  für  $\mu = 0, 1, \dots$ ,  $n = \mu + 1, \mu + 2, \dots$ . Anlässlich seiner Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge hat L. Fejér [Acta Litt. Sci. Szeged 8, 89—115 (1937); dies. Zbl. 16, 108] gezeigt, daß  $A_n(x, \mu) > 0$  ist für reelle  $x$  im Intervall  $-1 < x < 1$ . Verf. zeigt allgemeiner, daß die Nullstellen der Polynome  $A_n(z, \mu)$  auf dem Rand des Einheitskreises liegen, was für  $\mu = 0$  trivial ist und für  $\mu = 1$  von E. Egerváry [Math. Z. 42, 221—230 (1937); dies. Zbl. 15, 306] nachgewiesen wurde. Der Beweis fließt aus einer Darstellung der  $A_n(z, \mu)$  mit Hilfe der ultrasphärischen Polynome  $P_n^{(j)}(\xi)$ , die durch die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j)}(\xi) w^n = (1 - 2\xi w + w^2)^{-j}$$

definiert sind [vgl. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, New York 1939; dies. Zbl. 23, 215]. Es ergeben sich noch zusätzliche Aussagen über die Vorzeichen der  $A_n(x, \mu)$  für beliebige reelle  $x$ . *Meyer-König* (Stuttgart).

• **Hall, Tord:** *On polynomials bounded at an infinity of points*. (Diss.) Uppsala: Appelbergs Boktryckeri, 1950. 47 S.

Sei  $C$  die Klasse derjenigen Polynome  $P(z)$ , welche in vorgegebenen Punkten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  unter vorgeschriebenen Schranken  $A_1, A_2, \dots$  liegen:  $|P(\lambda_\nu)| \leq A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Sei  $M(z_0) = \sup_{P \in C} |P(z_0)|$ , wo  $z_0 \neq \lambda_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Verf. nennt

den vorliegenden Fall hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem  $M(z_0) = 0$ ,  $0 < M(z_0) < \infty$  oder  $M(z_0) = \infty$  ist. Der Zweck der Arbeit ist, Kriterien für die verschiedenen Fälle zu suchen. Der hyperbolische Fall wird durch die Annahme  $A_\nu \geq 1$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) ausgeschlossen. Verf. nimmt ferner an, daß  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\lambda_\nu^k|/A_\nu = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). — Anfangs wird der Fall studiert, daß sämtliche Polynome von demselben Grade und in endlich vielen Punkten beschränkt sind. Der allgemeine Fall wird hieraus durch zwei Grenzübergänge erreicht. Für den parabolischen Fall ergibt sich als notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu}{A_\nu} \lambda_\nu^k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) eine Lösung  $\{\xi_\nu\}$  hat, welche den Be-



dingungen  $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_{\nu}| \leq 1$ ,  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_{\nu}/A_{\nu} \neq 0$  genügt. Mit Hilfe dieses Resultats werden einige Kriterien für den elliptischen Fall gefunden. *V. Paatero (Helsinki).*

**Castro Brzezicki, A. de:** Über fortsetzbare und nichtfortsetzbare Taylorsche Reihen. *Gac. mat., Madrid, I. Ser. 1*, 263—268 (1949) [Spanisch].

Eine ausführliche Darlegung bekannter Sätze des Ideenkreises um den Satz: Soll eine Potenzreihe mit endlichem, von null verschiedenem Konvergenzkreis über diesen fortsetzbar sein, so müssen zwischen den Koeffizienten der Potenzreihe Beziehungen bestehen. *Holzer (Graz).*

**Teghem, J.:** Sur les conditions d'applicabilité d'une méthode de prolongement analytique de Borel. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35*, 177—185 (1949).

Une méthode de prolongement analytique de Borel consiste à choisir une suite de fonctions  $f_n(z) = \sum c_{\nu}^{(n)} z^{\nu}$ , les séries étant convergentes dans un domaine  $A$  contenant le cercle-unité, avec  $f_n(z) \rightarrow 1/(1-z)$  uniformément, dans tout domaine  $A' \subset A$ . Alors, si  $f(z) = \sum u_n z^n$  a un rayon de convergence positif, on peut prolonger  $f(z)$  par

$$f(z) = \lim F_n(z), \quad F_n(z) = \sum c_{\nu}^{(n)} u_{\nu} z^{\nu}$$

dans un domaine  $\mathfrak{A}$ , intersection de l'intérieur  $(C)$  d'une courbe fermée  $C$  entourant 0 et laissant tous les sommets de l'étoile de Mittag-Leffler de  $f(z)$  à son extérieur, avec le domaine formé des points  $xa$ ,  $a \in A$ ,  $x \in C$ . Leau [*C. r. Acad. Sci., Paris 127*, 607—609 (1898)] montre que la méthode est applicable même si  $A$  ne contient pas le cercle-unité, pourvu que  $A$  contienne l'origine. L'A. montre que la méthode est encore applicable si l'origine est extérieure à  $A$ , pour des fonctions  $f(z)$  particulières, qui satisfont aux conditions: a)  $f(z)$  holomorphe à l'extérieur du contour rectifiable  $C$  laissant 0 à son extérieur et tel que  $(C)$  et le domaine des points  $xa$ ,  $x \in C$ ,  $a \in A$  aient une région commune. b)  $N$  étant l'ordre du zéro de  $f(z)$  en 0 [ $N = 0$  si  $f(0) \neq 0$ ] et  $m$  le plus grand entier tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\mu}^{(n)} = 1$  pour  $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ , le point  $\infty$  est un pôle d'ordre  $< N + m$  pour  $f(z)$  (point régulier = pôle d'ordre 0, zéro = pôle d'ordre  $-1$ ). On a alors dans  $\mathfrak{A}$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(N)}(z), \quad F_n^{(N)}(z) = \sum c_{\nu}^{(n)} u_{\nu+N} z^{\nu+N}.$$

Suivent deux applications, obtenues pour des choix remarquables de la suite  $f_n(z)$ .

*Calugareanu (Cluj).*

**Mursi, Zaki:** Sur l'ordre de fonctions entières définies par interpolation. *Bull. Sci. math., II. S. 73r*, 96—112 (1949).

Die ganze Funktion  $f(z)$ , welche in den Punkten  $\{a_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), die paarweise voneinander verschieden sind und für welche  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  gilt, die Werte  $b_n$  annimmt, läßt sich bekanntlich in der Gestalt

$$(1) \quad f(z) = \varphi(z) \sum b_n (z/a_n)^{\lambda_n / \psi'(a_n)} (z - a_n)$$

schreiben, wobei  $\varphi(z)$  das kanonische Produkt der einfachen Nullstellen  $\{a_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) bedeutet und  $\{\lambda_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) eine beliebige Folge positiver ganzer Zahlen ist, die nur so gewählt sein müssen, daß die rechte Seite von (1) auf jeder beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig konvergiert. Verf. beweist nun folgende beiden Theoreme, welche Verallgemeinerungen des voranstehenden Satzes darstellen: I.  $\{a_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) und  $\{b_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) seien zwei Folgen komplexer Zahlen, wobei  $\{a_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) monoton und nicht beschränkt sein soll.  $\varphi(z)$  bezeichne das kanonische Weierstraßsche Produkt der Nullstellen  $a_n$  mit der Vielfachheit  $n+1$  und die Folge  $\{C_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) sei erklärt durch  $C_n = (n+1) b_n \varphi^{(n+1)}(a_n)$ . Ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n / \log |a_n| = k \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \log n / \log |1/C_n| = \sigma \quad \text{und} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log^+ \log^+ |C_n| / \log |a_n| = \tau,$$

so gilt für die allgemeine ganze Funktion

$$(2) \quad f(z) = \varphi(z) [g(z) + \sum C_n (z/a_n)^{\lambda_n / (z - a_n)}],$$

deren Ordnung höchstens  $\text{Max}(2k, \sigma, \tau)$  ist,

$$f^{(\nu)}(a_{\nu}) = b_{\nu}, \quad f'(a_{\nu}) = f''(a_{\nu}) = \dots = f^{(\nu-1)}(a_{\nu}) = 0; \quad \nu = 0, 1, \dots$$

$g(z)$  ist eine beliebige ganze Funktion, und die Folge positiver ganzer Zahlen  $\{\lambda_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) braucht nur so gewählt zu werden, daß die in (2) vorkommende unendliche Reihe auf jeder beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge, welche keinen Punkt  $a_n$  enthält, gleichmäßig konvergent ist. II.  $\{c_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) sei eine Folge paarweise voneinander verschiedener komplexer Zahlen, für welche  $\{|c_n|\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) monoton wachsend und unbeschränkt ist.  $G(z)$  sei das kanonische Weierstraßsche Produkt der Nullstellen  $c_n$  von der Vielfachheit  $\lambda_n + 1$  und  $k$  die kleinste positive Zahl, für die  $\sum (\lambda_n + 1)/|c_n|^{k+1}$  konvergiert.  $\{a_{nv}\}$  ( $n = 0, 1, \dots, \lambda_n$ ) sei eine beliebige Doppelfolge komplexer Zahlen. Ferner sei

$$b_{nv} = \frac{v!}{2\pi i} \oint_{|z-c_n|=s} (z-c_n)^{\lambda_n-v} G(z) dz; \quad v = 0, 1, \dots, \lambda_n,$$

wobei  $s$  so zu wählen ist, daß  $|z-c_n| \leq s$  keinen anderen Punkt der Folge  $\{c_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ )

enthält und  $d_{nv} = \sum_{\kappa=0}^v a_{n\kappa} b_{n, v-\kappa}$ ;  $v = 0, 1, \dots, \lambda_n$  mit  $d_n = \max_{0 \leq i \leq \lambda_n} |d_{ni}|$ . Ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log^+ (\log^+ d_n) / \log |c_n| = \tau \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \log n / \log |1/\alpha_n| = \sigma,$$

wobei  $F(z) = \sum \alpha_n z^n$  eine beliebige ganze Funktion bezeichnet, so genügt die ganze Funktion

$$(3) \quad \Phi(z) = G(z) \left\{ F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(z)/(z-c_n)^{\lambda_n+1} - Q_m(z)] \right\},$$

deren Ordnung höchstens gleich  $\max(k, \sigma, \tau)$  ist, den Bedingungen

$$\Phi^{(v)}(c_n)/v! = a_{nv}; \quad v = 0, 1, \dots, \lambda_n.$$

In (3) ist  $U_n(z) = \sum_{v=0}^{\lambda_n} d_{nv}(z-c_n)^v$  und  $Q_m(z)$ , wobei  $m$  passend zu wählen ist, die  $m$ -te Partialsumme der Taylorsche Reihe von  $U_n(z)/(z-c_n)^{\lambda_n+1}$ . — Wegen näherer Einzelheiten und Literaturhinweise muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Lammel (Tucumán).*

**Łojasiewicz, S.:** Une démonstration du théorème de Fatou. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **22**, 241—244 (1950).

Simplification de la démonstration classique du théorème de Fatou sur les valeurs limites aux points frontières d'une fonction holomorphe bornée dans le cercle unité. *Dufresnoy (Bordeaux).*

**Valiron, Georges:** Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 40—42 (1950).

Verf. beweist, daß jede meromorphe Funktion nullter Ordnung höchstens einen einzigen Nevanlinnaschen defekten Wert besitzt. Dies verallgemeinert einen Satz von Pham, der dasselbe Resultat unter der Annahme  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{(\log r)^2} < 0$

oder  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log(\log r)} < 0$  als Folgerung aus den Eigenschaften von periodischen meromorphen Funktionen erhalten hat [dies. Zbl. **33**, 267]. *V. Paatero.*

**Harvey, A. R.:** The mean of a function of exponential type. *Amer. J. Math.* **70**, 181—202 (1948).

Die Funktion  $f(z)$  heißt vom Exponentialtypus  $k$  in der ganzen Ebene bzw. in der Halbebene  $Rz \geq 0$ , wenn sie in dem Grundgebiet analytisch und  $M(r) = O(e^{(k+\varepsilon)r})$  für jedes  $\varepsilon > 0$  und kein  $\varepsilon < 0$  ist, wo  $M(r)$  das Maximum von  $|f(z)|$  auf dem Kreis  $|z| = r$  bzw. auf dem Halbkreis  $|z| = r, Rz \geq 0$  bedeutet. Im ersten Fall werden das  $p$ -te Mittel ( $p > 0$ ) auf einer Horizontalen

$$M^p\{f(x+iy)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T |f(x+iy)|^p dx$$

und das auf den ganzzahligen Argumenten

$$M_i^p\{f(x)\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^{-1} \sum_{i=-n}^n |f(i)|^p,$$

im zweiten Fall die entsprechenden einseitigen Mittel  $N^p\{f(x+iy)\}$  und  $N_i^p\{f(x)\}$  gebildet. Für den Fall, daß eine Funktion vom Exponentialtypus im Reellen beschränkt ist:  $|f(x)| \leq B$ , kennt man eine Reihe von Sätzen wie: Es ist dann



$|f(x + i y)| \leq B e^{k|y|}$  und  $|f'(x)| \leq k B$ ; ferner folgt für  $k < \pi$  aus der Beschränktheit auf den ganzzahligen Argumenten die Beschränktheit auf der ganzen Achse. In der vorliegenden Arbeit werden nun die entsprechenden Sätze unter der Voraussetzung beschränkter Mittel im Reellen bewiesen. Die Funktionen dieser Klasse umfassen z. B. die im Sinne von Besicovitch fastperiodischen Funktionen. — Es gelten folgende Sätze. Satz 2: Es ist

$$M^p \{f(x + i y)\} \leq e^{p k |y|} M^p \{f(x)\}.$$

Satz 3 und 4: Es ist  $M^p \{f'(x)\} \leq B M^p \{f(x)\}$  mit  $B = k^p$  für  $p > 1$  und  $B = (p + 2) 2^{p+2} (e^{k \delta p} - 1) / \pi k p \delta^{p+1}$  ( $\delta > 0$  beliebig klein) für  $p > 0$ . Satz 5. Wenn  $f(z)$  vom Minimaltypus ist, d. h.  $k = 0$ , und  $M^p \{f(x)\} < \infty$  ( $p > 0$ ), so ist  $f(z)$  eine Konstante. Satz 6. Ist  $M^p \{f(x)\}$ ,  $p \geq 1$ , endlich, so ist  $M^p \{f(x + i y)\}$  eine stetige Funktion von  $y$ . Satz 7. Es ist  $M_i^p \{f(x)\} = 8(e^{\frac{1}{2} k p} - 1) M^p \{f(x)\} / \pi k p$ . Satz 8: Für  $k < \pi$  ist  $M^p \{f(x)\} \leq B M_i^p \{f(x)\}$ , wo  $B$  eine nur von  $p$  und  $k$  abhängige Konstante ist. — Für die einseitigen Mittel  $N^p$  und  $N_i^p$  gelten die zu Satz 2, 3, 4, 7 und 8 analogen Sätze. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Korevaar, J.: Functions of exponential type bounded on sequences of points. Ann. Soc. Polonaise Math. 22, 207—234 (1950).

Vergleiche J. Korevaar, dies. Zbl. 31, 299.

A. Pfluger (Zürich).

Bellman, Richard: An analog of an identity due to Wilton. Duke math. J. 16, 539—545 (1949).

Eine von Wilton [Proc. London Math. Soc., II. S. 31, 1—10 (1930)] für  $\zeta(s)$  bewiesene Relation wird hier auf  $\zeta^2(s)$  verallgemeinert und ergibt:

$$4\sigma > 1, \quad 4\sigma' > 1, \quad \sigma + \sigma' > 1;$$

$$\begin{aligned} \zeta^2(s) \zeta^2(s') - \frac{\zeta'(s + s' - 1)}{s' - 1} + \zeta^2(s + s' - 1) \left\{ \frac{1}{(s' - 1)^2} - \frac{2C}{1 - s'} \right\} \\ - \frac{\zeta'(s + s' - 1)}{s - 1} + \zeta^2(s + s' - 1) \left\{ \frac{1}{(s - 1)^2} - \frac{2C}{1 - s} \right\} \\ = 2 \sum_{r=1}^{\infty} r^{s'-1} \int_{\sqrt{r}}^{\infty} \frac{M_0(4\pi u)}{u^2 s'^{-1}} du \left( \sum_{k=n-r}^{\infty} \frac{d(k) d(n)}{n^{s+s'-1}} \right) + (s \leftrightarrow s'), \end{aligned}$$

wo  $(s \leftrightarrow s')$  den voranstehenden Term unter Vertauschung von  $s$  und  $s'$  bedeutet. — Die Voronojsche Summationsformel und schwierige Abschätzungen von Summen etwa der Art  $\sum_{n < x^2} d(n) \exp(2\sqrt{n}) n^{-\frac{1}{2}} (x - \sqrt{n})$  sind die hauptsächlichsten Beweismethoden. Hoheisel (Köln).

Bellman, Richard: Wigert's approximate functional equation and the Riemann zeta-function. Duke math. J. 16, 547—552 (1949).

Wigerts approximative Funktionalgleichung für  $\sum_{n=1}^{\infty} d(n) e^{-nz}$ , die bei der Auswertung von  $\int |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^p dt$  nützlich sein kann, wird hier verallgemeinert auf Funktionen  $W_k(z) = \sum d_{2k}(n) V_k(nz)$ , wo  $2\pi i V_k(z) = \int \Gamma(s) z^{-s} ds$  ( $-k\pi/2 < \arg z < k\pi/2$ ). Es ist dann gleichmäßig für  $|z| = O(1)$  und  $k$  gerade:

$$W_k(z) - R_k(z) = c_4 z^{-1} W_k((2\pi)^{2k}/z) + P_{k-1}(\log z) + O(1),$$

wobei  $R_k(z)$  das Residuum in  $s = 1$  von  $\Gamma(s)^k \zeta^{2k}(s) z^{-s}$  und  $P_{k-1}$  ein Polynom vom Grad  $\leq k-1$  ist. — Die naheliegende und für das Studium der Mittelwerte wichtigere Ausdehnung auf  $\sum d_k(n) e^{-nz}$  ist bisher nicht gelungen. Hoheisel.

Epheser, Helmut: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, die von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet sind. J. reine angew. Math. 187, 131—152 (1950).

$G_t$  étant un polygone simple à  $n$  cotés, du plan ( $t$ ), la transformation  $z = e^t$  change  $G_t$  en un polygone curviligne  $G_z$  du plan ( $z$ ), polygone dont les cotés sont  $n$  arcs de spirale logarithmique de centre 0, et qui laisse 0 à son extérieur. En représentant conformément le demi-plan  $I(x) > 0$  sur  $G_t$ , par l'intégrale de Schwartz-Christoffel, on obtient en même temps, par l'intermédiaire de  $z = e^t$ , une représentation conforme du demi-plan  $I(x) > 0$  sur le polygone curviligne  $G_z$ . Mais  $G_z$  est particulier, car il doit laisser l'origine  $z = 0$  à son extérieur. L'A. trouve le moyen de traiter le cas d'un  $G_z$  contenant  $z = 0$ , et d'un  $G_z$  contenant  $z = 0$  et  $z = \infty$ . Dans le premier cas, on a les formules

$$z = e^t, \quad t = C \int_{x_0}^x \frac{(x-a_1)^{-\alpha_1} (x-a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{-\alpha_n}}{(x-l)(x-\bar{l})} dx + C'$$

avec  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ ,  $I(l) > 0$ , et dans le second

$$z = e^t, \quad t = C \int_{x_0}^x \frac{(x-a_1)^{-\alpha_1} (x-a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{-\alpha_n}}{(x-l_0)(x-\bar{l}_0)(x-l_\infty)(x-\bar{l}_\infty)} dx + C'$$

avec  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -2$ ,  $I(l_0) > 0$ ,  $I(l_\infty) > 0$ . Une détermination convenable de  $C$  est ici nécessaire pour que  $z(x)$  soit uniforme dans le demi-plan  $I(x) > 0$ . Ceci ramène le problème de la représentation conforme d'un domaine  $G_z$ , dont la frontière se compose de  $n$  arcs de spirales logarithmiques de même centre, à la détermination des paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , problème qui offre des difficultés analogues à celles que l'on rencontre pour le cas des polygones rectilignes. Les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  peuvent être traités complètement. Pour  $n > 3$  on est conduit à des conditions transcendentes qui dégénèrent lorsque  $G_z$  a des angles droits seulement; les fonctions elliptiques interviennent alors. L'A. retrouve ces résultats en reliant ce problème à la théorie des équations différentielles du type de Fuchs.

Calugareanu (Cluj).

**Cartan, Henri:** Sur un cas de prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables complexes. — Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr. 61, 6 S. (1949).

**Myrberg, P. J.:** Reflexions sur la note précédente. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr. 62, 4 S. (1949).

E. Hecke hatte [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 1, 102—126 (1922)] zuerst systematisch analytische Funktionen  $f(z, z')$  untersucht, die die diskontinuierliche Gruppe von Substitutionen

$$z_1 = \eta_1 z + 2\pi i \alpha, \quad z'_1 = \eta'_1 z' + 2\pi i \alpha'$$

in sich zulassen, wo  $\alpha$  die ganzen Zahlen,  $\eta$  die totalpositiven Einheiten eines reell quadratischen Zahlkörpers durchläuft. Er hatte vermutet, daß insbesondere die analytischen Ebenen  $z = 0$ ,  $z' = 0$  Singularitäten dieser Funktionen seien. P. J. Myrberg bewies dies [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 7, 64—66 (1929)]. Nunmehr hat H. Cartan auf Anfrage von Myrberg bewiesen: Wenn ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  des  $w, z$ -Raumes mit jedem Punkte  $w_0, z_0$  auch den Punkt  $\lambda w_0, \mu z_0$  enthält,  $\lambda, \mu$  vorgegebene komplexe Zahlen, für die  $|\lambda| > 1$ ,  $|\mu| < 1$ , und wenn zu  $\mathfrak{G}$  außerdem mindestens je ein Punkt auf den Achsen  $w = 0$  und  $z = 0$  gehört, so umfaßt die Hülle  $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$  den Punkt  $(0, 0)$ . — Daraus folgt unmittelbar die Heckesche Vermutung. Cartan beweist darüber hinaus einen analogen Satz für Funktionen von mehr als 2 Veränderlichen. Myrberg weist in der anhängenden Note darauf hin, daß es 1. Funktionen gibt, für die

$$f(az, bw) = f(z, w), \quad |a| > 1, \quad |b| < 1$$

und die außer auf den Achsen überall sich meromorph verhalten, 2. der Satz von Cartan auch anzuwenden ist auf die Funktionenpaare

$$f(az, bw) = P_1(f(z, w), g(z, w)); \quad g(az, bw) = P_2(f(z, w), g(z, w)),$$



wo  $P_1, P_2$  ganze Funktionen sind [L. Bieberbach, S.-B. preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. 1933, 476—479; dies. Zbl. 7, 215]. Sie sind wichtig bei den Abbildungen des  $w, z$ -Raumes auf Teile von sich. *H. Behnke* (Münster).

**Degtereva, M.:** Elemente der Theorie der analytischen Funktionen im Zentrum linearer Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1491—1493 (1948) [Russisch].

**Degtereva, M.:** Zur Frage des Aufbaues der Theorie der analytischen Funktionen in linearen Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 13—15 (1948) [Russisch].

I. Ist  $A(e_1, \dots, e_n)$  eine assoziative Algebra und  $B(e_1, \dots, e_k)$  ( $k \leq n$ ) eine kommutative Subalgebra, so heißt  $f(z_1, \dots, z_k) = \sum_{h=1}^n f_h e_h$  eine rechts- resp. links-analytische Funktion der Variablen  $z = \sum_{j=1}^k z_j e_j$ , falls

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_p} e_i e_q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_q} e_i e_p \text{ resp. } \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_p} e_q e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_q} e_p e_i \quad (p, q \leq k).$$

Für rechts-analytische Funktionen gilt  $\int_C f dz = 0$  [ $C$  geschlossene Jordankurve im  $k$ -dimensionalen Regularitätsbereich von  $f(z)$ ], und es existiert eine rechte Stammfunktion  $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ , die selbst auch wieder rechts-analytisch ist. Das Di-Integral  $\int_C f(z) \cdot dz \cdot g(z)$  [ $f(z)$  rechts-,  $g(z)$  links-analytisch] über eine geschlossene Jordankurve  $C$  im gemeinsamen Regularitätsbereich von  $f$  und  $g$  verschwindet. Damit werden Funktionenpaare eingeführt, wie sie in ähnlichem Zusammenhang in der Fueterschen Theorie verwendet werden. — Der Spezialfall  $k = n$  einer kommutativen Algebra wurde schon von V. L. Gončarov [Izvestija Akad. Nauk SSSR 10, 1406 (1932); dies. Zbl. 6, 352] behandelt. — II. Verf. beweist, daß die Hausdorff-Ringleische Definition der analytischen Funktionen und die unter I. gegebene Definition für kommutative Algebren äquivalent sind. Beispiele von nach Hausdorff analytischen Funktionen in nichtkommutativen Algebren lassen erkennen, daß die so definierten Funktionen sehr speziell sind. *Kristen* (Zürich).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

**Hacar Benitez, Miguel Angel:** Interpretation der Differentialgleichung zweiter Ordnung  $ky y'' + y'^2 + 1 = 0$  und Untersuchung einiger ihrer Lösungen. Gac. mat., Madrid, I. Ser. 2, 46—53 (1950) [Spanisch].

**Gosse, René:** Sur une équation de Langmuir généralisée. Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 1, 5—11 (1950).

La Nota é dedicata a porre in luce alcune proprietà asintotiche della soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + y' p(x, y, y') + q(x) \frac{d\alpha(y)}{dy} = f(y)$$

determinata dalle condizioni iniziali  $x = x_0, y = y_0, y'(x_0) = 0$ . — Le funzioni  $p, q, \alpha$  ed  $f$  sono assoggettate a talune condizioni che sono, in particolare, soddisfatte, nel caso dell'equazione  $y'' + h = ke^{3x/2} y^{-1/2}$  essendo  $h$  e  $k$  costanti positive.

*Gaetano Fichera* (Roma).

**Pejović (Péyovitch), T.:** Sur les solutions asymptotiques de certaines équations différentielles. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 189—195 und französ. Zusammenfassg. 196 (1948) [Serbisch].

Soit donné un système d'équations  $dx/dt = -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y$ ,

$dy/dt = m + a_{21}e^x + a_{22}e^y$  où  $a_{ik}$  sont des fonctions réelles, finies et continues pour la variable réelle  $t \geq t_0 > 0$ ;  $l$  étant une constante positive,  $m$  une constante positive ou nulle. Il est facile à démontrer que les équations admettent un système de solutions satisfaisant aux conditions  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} dx/dt = -l$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dt = m$ . (Autoreferat).

Pejović (Péyovitch), T.: Sur une propriété asymptotique de certaines équations différentielles. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 197—199 und franz. Zusammenfassg. 199 (1948) [Serbisch].

Soit donné un système d'équations de la forme

$$(1) \quad dx_i/dt = (a_{i1} - \lambda) e^{x_1} + \dots + (a_{in} - \lambda) e^{x_n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

où  $a_{ik}$  sont des fonctions réelles, continues et limitées de la variable réelle  $t \geq t_0 \geq 0$ ,  $\lambda$  une constante réelle, positive et convenablement choisie. Supposons que les équations (1) admettent un système de solutions réelles, continues et déterminées pour  $t \geq t_0 \geq 0$ . Il est facile à démontrer que ce système admet les propriétés

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} dx_i/dt = 0. \quad (\text{Autoreferat}).$$

Akilov, G. P.: Über die Anwendung einer Lösungsmethode nichtlinearer Funktionalgleichungen auf die Untersuchung von Differentialgleichungssystemen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 645—648 (1949) [Russisch].

Die Methode von L. V. Kantorovič (dies. Zbl. 31, 57; 34, 212) wird angewendet auf die Lösung von Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es handelt sich um die Lösung des Systems:

$$(1) \quad dx_s/dt = F_s(t, x_0, x_1, \dots, x_n), \quad s = 0, 1, 2, \dots, n$$

mit den Randbedingungen

$$\Phi_s(\{x_s\}) = \Phi_s(x_0(0), \dots, x_n(0); x_0(1), \dots, x_n(1)) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Eine Näherungslösung des betrachteten Systems sei  $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ . Man betrachte das folgende Gleichungssystem:

$$(2) \quad d(x_s - x_s^{(0)})/dt = \sum_{k=0}^n (\partial F_s / \partial x_k)_0 (x_k - x_k^{(0)}) + F_s(t, x_0^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

unter den Bedingungen

$$A_s(\{x_k\}) + B_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^n (\partial \Phi_s / \partial U_k)_0 x_k^{(0)}(0) + \sum_{k=0}^n (\partial \Phi_s / \partial V_k) x_k^{(0)}(1) - \Phi_s(\{x_k^{(0)}\}).$$

Hier ist

$$A_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^n (\partial \Phi_s / \partial U_k)_0 x_k(0) \quad \text{und} \quad B_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^n (\partial \Phi_s / \partial V_k)_0 x_k(1).$$

Durch die Lösung dieses linearen Systems gewinnen wir das Funktionensystem  $\{x_k^{(1)}(t)\}$ , welches eine neue Näherung gestattet. Mit diesem System wird in derselben Weise eine neue Näherung gefunden, usw. Verf. beweist folgenden Satz über die Konvergenz des Prozesses:  $\{x_{k,i}\}_{k,i=0,1,\dots,n}$  sei die Gesamtheit der linear unabhängigen Lösungen eines homogenen Systems, das dem System (2) zugeordnet ist. Ist dann die Determinante

$$\Delta = |A_s(\{x_{k,i}\}) + B_s(\{x_{k,i}\})|_{s,i=0,1,\dots,n} \neq 0,$$

so existiert eine Lösung des Systems (1), welche die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Die Folge der Näherungslösungen des erwähnten Prozesses konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung in  $[0, 1]$ . Es werden manche Anwendungen der Methode angegeben. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Auflösungsmethode für praktische Zwecke sehr gut anwendbar ist, denn in den meisten Fällen ist die Konvergenz sehr schnell. Verf. bemerkt, dass die Gleichung  $d^2x/dt^2 + v^2x + \varepsilon f(x, dx/dt) = 0$  mit der gleichen Methode gelöst werden kann. Dieses Verfahren ist günstiger als die von N. M. Krylov und N. N. Bogoljubov (Einführung in die nichtlineare



Mechanik 1937; angegebene Methode. — Auch ein bekanntes Theorem von A. M. Ljapunov über gewisse Systeme von Differentialgleichungen kann mit dieser Methode mühelos bewiesen werden. *St. Fenyő* (Budapest).

**Friedrichs, K. O.:** Criteria for the discrete character of the spectra of ordinary differential operators. *Studies Essays*, pres. to R. Courant, 145—160 (1948).

Zugrunde gelegt ist das Eigenwertproblem  $Lx = \lambda x$  mit  $L = -r^{-1}(DpD - q)$ , wobei  $r, p, q$  gegebene Funktionen von  $\xi$  in  $\xi_- < \xi < \xi_+$  bedeuten und  $D$  die Differentiation nach  $\xi$  ist ( $r > 0, p > 0$ ). Mit  $\xi_- < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_+$  wird  $\tau = \int_{\xi_0}^{\xi} p^{-1} d\xi, \tau_+ = \int_{\xi_0}^{\xi_+} p^{-1} d\xi, \tau_- = -\int_{\xi_-}^{\xi_0} p^{-1} d\xi$  und  $h = \tau$  in  $\xi_1 \leq \xi < \xi_+$ , wenn  $\tau_+ = \infty$ , und  $= \tau_+ - \tau$ , wenn  $\tau_+ < \infty$ , sowie  $h = -\tau$  in  $\xi_- < \xi \leq \xi_{-1}$ , wenn  $\tau_- = -\infty$ , und  $= \tau - \tau_-$ , wenn  $\tau_- > -\infty$ , erklärt. Dann hat  $L$  ein diskretes Spektrum ( $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ ), wenn  $r^{-1}(q + (4ph^2)^{-1}) \rightarrow \infty$  falls  $\xi \rightarrow \xi_+$  und  $\xi \rightarrow \xi_-$ , und es ist „diskret unter  $\lambda^*$ “, wenn  $\liminf r^{-1}(q + (4ph^2)^{-1}) \geq \lambda^*$ , falls  $\xi \rightarrow \xi_+, \xi \rightarrow \xi_-$ . Es ist nicht diskret, wenn es ein  $c_0$  gibt, so daß  $r^{-1}(|q| + (4ph^2)^{-1}) \leq c_0$  entweder in  $\xi_1 \leq \xi < \xi_+$  oder in  $\xi_- < \xi \leq \xi_{-1}$  und wenn außerdem ein  $\gamma \geq 0$  existiert mit  $r^{-1}(q + (4ph^2)^{-1}) \geq -\gamma$  in  $\xi_- < \xi < \xi_+$ .

Zur Herleitung wird die Transformation  $\eta = \int_{\xi_0}^{\xi} (ph)^{-1} d\xi$  (also  $-\infty < \eta < +\infty$ , wenn  $\xi_- < \xi < \xi_+$ ),  $y = x/\sqrt{h}$  ausgenutzt. Es wird  $\frac{Lx}{\sqrt{h}} = My$  mit  $M = -r^{-1}p^{-1}h^{-2}(D_\eta^2 - qp h^2 - \frac{1}{4}\sigma)$  mit  $\sigma = (pDh)^2 - 2hpD(pDh)$  und  $D_\eta = d/d\eta$ .

Dabei ist das innere Produkt für die  $y$  gegeben durch  $\int_{-\infty}^{+\infty} r p h^2 y^2 d\eta < \infty$ . Als eine wesentliche Bedingung für die  $y$  wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{(D_\eta y)^2 + (qph^2 + \frac{1}{4}\sigma + \gamma rph^2) y^2\} d\eta < \infty$$

verlangt unter der Voraussetzung der Existenz einer Konstanten  $\gamma$  mit  $qph^2 + \frac{1}{4}\sigma + \gamma rph^2 \geq 0$  für  $-\infty < \eta < \infty$ . Nun gelingt die Definition des Operators  $L$  als eines selbstadjungierten Operators durch Zurückführung auf  $M$ , ohne daß man Randbedingungen gesondert fordern müßte. *Rellich* (Göttingen).

**Stiefel, Eduard und Hans Ziegler:** Natürliche Eigenwertprobleme. I. *Z. angew. Math. Phys.*, Basel **1**, 111—138 (1950).

Die Verff. setzen sich zum Ziel, eine Eigenwerttheorie für Eigenwertaufgaben bei einer unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen aufzustellen, welche im Hinblick auf Anwendungen in der Mechanik nur Voraussetzungen benutzt, die den physikalischen Problemen entsprechen und im Einzelfalle leichter nachprüfbar sind als die sonst in der Eigenwertlehre gewöhnlich getroffenen Voraussetzungen. Dazu gehen sie von Variationsprinzipien aus, wie sie sich bei Schwingungs- und Stabilitätsaufgaben meist von selbst aus der betreffenden mechanischen Aufgabe ergeben. An Hand von Schwingungsaufgaben werden über die potentielle und kinetische Energie die Voraussetzungen für „natürliche Eigenwertaufgaben“ zusammengestellt. Sie gehen nicht über die Forderungen hinaus, die man üblicherweise an einen eindimensionalen konservativen Schwinger stellt. — Nach der mechanischen Einkleidung wird auch eine rein mathematische Formulierung der „natürlichen Eigenwertaufgabe“ gegeben; bei ihr sollen Eigenwerte  $\lambda$  und „zulässige Funktionen“  $y(x)$  bestimmt werden, die für jede zulässige Variation  $\eta(x)$  der Bedingung  $\Phi[y, \eta] - \lambda \Psi[y, \eta] = 0$  genügen. Zulässig sind dabei reelle, in  $a \leq x \leq b$  mindestens  $(m-1)$ -mal stetig und  $m$ -mal stückweise stetig differenzierbare, gewissen gegebenen linearen, voneinander linear unabhängigen, wesentlichen (bei den Verff.

„kinematisch“ genannten) Randbedingungen genügende Funktionen. Ferner sind

$$\Phi[y, \eta] = \int_a^b \sum_{i=1}^m f_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + F[y, \eta], \quad \Psi[y, \eta] = \int_a^b \sum_{i=1}^n g_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + G[y, \eta]$$

reelle Bilinearausdrücke mit  $m > n$ ,  $f_m(x) > 0$  und  $F[y, \eta]$ ,  $G[y, \eta]$  reelle symmetrische Bilinearformen in den Randwerten  $y_a, y'_a, \dots, y_a^{(m-1)}$ ;  $y_b, \dots, y_b^{(m-1)}$ ;  $\eta_a, \dots, \eta_b^{(n-1)}$ . Die Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung der üblichen selbstadjungierten Gestalt [jedoch kann hier auf die Forderung  $g_n(x) \neq 0$  verzichtet werden] und auf zusätzliche restliche „dynamische“ Randbedingungen, die auch den Eigenwert  $\lambda$  linear enthalten können. Gerade diese Erscheinung des Auftretens von  $\lambda$  in den Randbedingungen ist für die Anwendungen in der Mechanik wichtig.

Collatz (Hannover).

G.-Mikusiński, Jan: Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits. Ann. Soc. Polonaise Math. **22**, 157—160 (1950).

Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri reali,  $\lambda$  vari in  $(\alpha, \beta)$ , e indichi  $C$  la classe delle funzioni  $x(\lambda)$  definite per  $\lambda$  variabile in  $(\alpha, \beta)$  i cui valori appartengono ad un anello  $A$  privo di divisori dello zero; sia inoltre possibile definire la derivazione in guisa che valgano le seguenti leggi

- 1)  $[x_1(\lambda) \pm x_2(\lambda)]' = x'_1(\lambda) \pm x'_2(\lambda)$ ; 2)  $[x_1(\lambda) x_2(\lambda)]' = x'_1(\lambda) x_2(\lambda) + x_1(\lambda) x'_2(\lambda)$ ;
- 3)  $[x(\mu - \lambda)]' = -x'(\mu - \lambda)$ ;
- 4) se  $x'(\lambda) \equiv 0$  per  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ , allora  $x(\lambda)$  è costante in  $(\alpha, \beta)$ .

In questa ipotesi l'A. dimostra che se  $a$  e  $b$  sono due elementi di  $A$ ,  $a \neq 0$ , e se  $c(\lambda)$  è una funzione della classe  $C$ , allora ciascuno dei due sistemi differenziali

$$a x'(\lambda) + b x(\lambda) = c(\lambda), \quad x(\lambda_0) = k, \quad [\alpha \leq \lambda_0 \leq \beta, \quad k \text{ in } A];$$

$$a x''(\lambda) + b x(\lambda) = c(\lambda), \quad x(\lambda_0) = k_1, \quad x'(\lambda_0) = k_2, \quad [\alpha \leq \lambda_0 \leq \beta, \quad k_1 \text{ e } k_2 \text{ in } A]$$

ammette al più una soluzione  $x(\lambda)$ . — L'A. prova con un esempio che nell'enunciato del teorema la condizione che  $A$  non possenga divisori dello zero non può essere soppressa.

Giovanni Sansone (Firenze).

## Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Germany, R.-H.-J.: Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I **63**, 148—154 (1949).

Ausdehnung der Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **33**, 371) auf den Fall eines Systems des Typus

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - A \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + B \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F \frac{\partial u}{\partial z} + H u + \varphi,$$

wobei  $A, B, C, D, E, F, H$  quadratische Matrizen  $n$ -ter Ordnung und  $u, \varphi$   $n$ -dimensionale Vektoren bedeuten, welche Funktionen der 3 Veränderlichen  $x, y, z$  sind.

G. Cimmino (Bologna).

Janet, Maurice: Sur les systèmes comprenant autant d'équations aux dérivées partielles que de fonctions inconnues. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 707—709 (1948).

Si abbiano  $n$  espressioni differenziali lineari, analitiche, con  $n$  funzioni incognite  $u_1, \dots, u_n$  in  $m+1$  variabili indipendenti:

$$E_i \equiv \sum_{k=1}^n A^{(i,k)} (u_k)_n \quad (i = 1, \dots, n).$$

La  $E_i$  sono indipendenti se non esistono  $n$  operatori (non tutti nulli)  $D_1, \dots, D_n$  tali che  $D_1 E_1 + \dots + D_n E_n$  risulti identicamente nullo, qualunque siano le  $u_k$ . È stato dimostrato recentemente [questo Zbl. **29**, 262], che a un sistema di  $n$  equazioni del tipo  $E_i = f_i$ , di ordine  $h$ , si può applicare un procedimento regolare, al più  $hn$  volte, mediante il quale si riconosce che le  $E_i$  non sono indipendenti, oppure che



il sistema può porsi in forma normale. Se  $\varrho$  è il numero di volte che il procedimento è stato applicato, la soluzione generale dipende da  $hn - \varrho$  funzioni arbitrarie di  $m$  variabili. — L'A. considera il caso  $\varrho = hn$ , rilevando che si avia determinazione completa per un sistema del tipo

$$D_i \left( \sum_{k=1}^n \Delta_k u_k \right) - u_i = f_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

dove gli operatori  $D$  e  $\Delta$  sono tali che l'operatore  $\sum_{k=1}^n \Delta_k D_k$  si riduca all'ordine zero (senza ridursi all'operatore identico). L. Amerio (Milano).

**John, Fritz:** On linear partial differential equations with analytic coefficients: Unique continuation of data. Commun. pure appl. Math., New York 2, 209—253 (1949).

L'A. studia il problema di Cauchy per l'equazione lineare a derivate parziali

$$(1) \quad L[u] = \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n A_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = B(x_1, \dots, x_n),$$

dove le  $A$ ,  $B$  sono funzioni analitiche, allo scopo di precisare la natura funzionale dei dati, atti ad individuare una soluzione. — Sia  $S$  un sistema di funzioni  $u$  definite in un insieme  $M$  di uno spazio euclideo. Sia  $m$  un sottoinsieme di  $M$ . L'A. chiama involucro (hull) ( $m$ ) di  $m$  rispetto a  $S$  l'insieme di tutti i punti  $P$  di  $M$ , tali che due qualsiasi funzioni di  $S$  che siano identiche in  $m$  coincidano in  $P$ . Le funzioni di  $S$  si dicono coerenti in  $m$  se  $m$  contiene un insieme  $m'$  chiuso e limitato ed un punto  $P$  esterno a  $m'$  tale che  $P$  appartenga all'involucro di  $m'$ . In caso contrario le funzioni di  $S$  sono dette incoerenti in  $m$ . — Associamo alla (1) e a un punto  $P(x_1, \dots, x_n)$  la forma caratteristica

$$Q_P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n A_{i_1, \dots, i_m}(x_1, \dots, x_n) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}.$$

Data una varietà  $M$  a  $r$  dimensioni, passante per  $P$ , consideriamo lo spazio lineare, a  $n - r - 1$  dimensioni, normale a  $M$  in  $P$  e indichiamo con  $\xi_1, \dots, \xi_n$  i coseni direttori di una normale. — Diremo la varietà  $M$  libera rispetto a  $L$  in  $P$  se è, per ogni normale,  $Q_P \neq 0$ . Se  $r = n - 1$ ,  $M$  risulta perciò, come è ben noto, una ipersuperficie non caratteristica. Una varietà  $M$  a  $k$  dimensioni si dice orientata nel tempo (time-like) in  $P$ , se  $M$  contiene una varietà libera, a  $k - 1$  dimensioni, passante per  $P$ . In caso contrario si dice che  $M$  è orientata nello spazio (space-like). — L'A. dimostra che se  $M$  è una ipersuperficie analitica orientata nel tempo, allora i dati di Cauchy su  $M$  sono coerenti per una soluzione  $u$  appartenente a un dominio della cui frontiera  $M$  faccia parte. Se  $M$  è una varietà analitica orientata nel tempo e interna al dominio di esistenza della soluzione  $u$ , i valori di  $u$  sono coerenti su  $M$ . — Viene successivamente studiata accuratamente l'equazione del secondo ordine non parabolica. — Nelle dimostrazioni viene utilizzata un modo ingegnoso la formula di Green.

Luigi Amerio (Milano).

**Chodyreva, V. M.:** Über eine Minimaleigenschaft des Kreises. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 615—618 (1949) [Russisch].

Verf. beweist eine Reihe von Sätzen über die Eigenfunktionen und Eigenwerte der Differentialgleichung

$$(1) \quad (-1)^k \Delta^k u - \lambda u = 0,$$

wo

$$\Delta^k u = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{(k-m)! m!} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2(k-m)} \partial y^{2m}}.$$

Satz 1: Unter allen ebenen Bereichen  $G$ , die durch stückweis-glatte Kurven  $\Gamma$  von gegebener Länge begrenzt sind, ist derjenige, bezüglich dessen die Differentialgleichung

chung (1) einen kleinstmöglichen Eigenwert besitzt, ein Kreis. — Satz 2. Der kleinste Eigenwert der Gleichung (1), bezüglich des Bereiches  $G'$ , der ganz in  $G$  liegt, ist größer als der erste Eigenwert bezüglich des Bereiches  $G$ . — Satz 3. Der kleinste Eigenwert der Gleichung (1) ändert sich stetig mit dem Bereich. — Satz 4. Der erste Eigenwert von (1) ist einfach. — Satz 5. Der Rand des Bereiches  $G$  soll einen geradlinigen Teil  $\mathcal{G}$  enthalten. Die Lösung  $u$  von (1) wird als regulär in  $G + \mathcal{G}$  bezeichnet, wenn sie zusammen mit ihren Ableitungen von der Ordnung  $\leq 2k$  in  $G + \mathcal{G}$  stetig ist. Wenn die Lösung  $u$  von (1) in  $G + \mathcal{G}$  regulär ist und wenn auf der Geraden

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial n} = 0$$

ist (wo  $n$  die Normale von  $\mathcal{G}$  ist), dann kann man  $u$  analytisch fortsetzen in den Bereich  $G'$ , der durch Spiegelung von  $G$  an  $\mathcal{G}$  entsteht; hierbei werden die Werte von  $u$  in den Punkten von  $G'$  gleich den Werten von  $u$  in den zugeordneten Punkten von  $G$  sein.

St. Fenyő (Budapest).

**Picone, Mauro:** Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della fisica-matematica. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 161—169 (1949).

Soit  $A$  un domaine borné de  $R^n$  ( $n \geq 2$ ), de diamètre  $\delta$ ,  $c(P)$  une fonction définie dans  $A$ , et  $u = u(P)$  une solution de l'équation (1)  $\Delta u + c(P)u = 0$ . L'A. démontre le théorème d'unicité suivant: Soient  $P_1, \dots, P_\mu$  points-frontière, et  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$   $\mu$  nombres positifs, de somme  $\alpha$ ; pour que  $u$  soit identiquement nulle il suffit qu'on ait, pour  $n > 2$ :  $\lim_{Q \rightarrow P} u(Q) \prod_{i=1}^{\mu} \overline{P_i Q}^{\alpha_i} = 0$  en tout point-frontière  $P$ ,  $\alpha < n - 2$ ,  $c(Q) < \alpha(n - 2 - \alpha)/\delta^2$  ( $Q \in A$ ); et pour  $n = 2$ :

$$\lim_{Q \rightarrow P} u(Q) \prod_{i=1}^{\mu} (\log(e \delta / \overline{P_i Q}))^{-\alpha_i} = 0, \quad \alpha < 1, \quad c(Q) < \alpha(1 - \alpha)/\delta^2 \quad (Q \in A).$$

Il est à noter qu'il n'est spécifié aucune condition de régularité sur  $c(P)$  et que, dans la plupart des travaux concernant le problème de Dirichlet relatif à (1) [avec  $c(P) \equiv \text{Cte}$ ] on se borne au cas  $c(P) \leq 0$ . L'article se poursuit par diverses applications à la nature des solutions de (1) et à l'unicité d'un problème de Dirichlet généralisé, moyennant quelques hypothèses supplémentaires relatives à la fonction  $c(P)$  ou à la nature des points-frontière.

Deny (Strasbourg).

**Leja, F.:** Remarques sur le travail précédent de M. Mauro Picone. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 170—172 (1949).

Le théorème central de l'article de M. Picone analysé ci-dessus peut être quelque peu amélioré; par exemple pour  $n > 2$  la condition  $\lim_{Q \rightarrow P} u(Q) \prod_{i=1}^{\mu} \overline{P_i Q}^{\alpha_i} = 0$  peut être remplacée par l'hypothèse plus faible:  $\lim_{Q \rightarrow P} u(Q) / \sum (1/\overline{P_i Q})^{\alpha} = 0$ ; remarque analogue pour  $n = 2$ .

Deny (Strasbourg).

**Richard, Ubaldo:** Sul problema della piastra incastrata. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I **83**, 21—27 (1949).

Verf. betrachtet die klassische Randwertaufgabe  $\Delta U = f$  mit den Randbedingungen  $u = 0, \partial u / \partial n = 0$ . Er nimmt die Greensche Funktion der Potentialtheorie für das zugehörige Gebiet als bekannt an und konstruiert mit deren Hilfe eine Integralgleichung mit symmetrischem, positiv definitem Kern. Das System der Eigenfunktionen dieser Gleichung erlaubt, ein System von im Inneren des Gebietes orthogonalen Potentialfunktionen zu konstruieren, die es ermöglichen, eine formale Lösung der obengenannten Aufgabe anzugeben.

Wolf Gross (Roma).

**Gårding, Lars:** Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1030—1032 (1950).



L'A. indica rapidamente un metodo per risolvere il problema di Dirichlet per le equazioni lineari a coefficienti costanti, di tipo ellittico, utilizzando la trasformata di Fourier e generalizzando risultati di Weyl [Duke math. J. 7, 411—444 (1940); questo Zbl. 26, 20] e Višik [Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 189—234 (1949)].

L. Amerio (Milano).

**Fichera, Gaetano: Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.** Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 1—28 (1948).

Sia  $D$  un dominio dello spazio, limitato esternamente da una superficie chiusa  $\Sigma_0$  e internamente dalle superficie chiuse  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ . Siano  $O_1, O_2, \dots, O_p$  punti interni a  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$  rispettivamente ed  $O_0$  un punto qualsiasi. Preso  $O_k$  come polo, indicate con  $\varrho_k, \vartheta_k, \varphi_k$  le corrispondenti coordinate polari e detto  $\{y_{ms}(\vartheta_k, \varphi_k)\}$  ( $s = 1, \dots, 2m+1$ ) un sistema fondamentale di funzioni sferiche di ordine  $m$ , poniamo

$$\omega_{ms}(P) = \varrho_0^m y_{ms}(\vartheta_0, \varphi_0), \quad \tau_{ms}^{(k)}(P) = \frac{y_{ms}(\vartheta_k, \varphi_k)}{\varrho_k^{m+1}}$$

e indichiamo con  $\{v_i(P)\}$  il sistema delle funzioni  $\omega_{ms}$  e  $\tau_{ms}^{(k)}$ . Le  $v_i(P)$  sono notoriamente funzioni armoniche. — L'A. studia la completezza hilbertiana, su  $FD$ , del sistema  $\{\alpha v_i + \beta \partial v_i / \partial n\}$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni assegnate, dimostrandola nelle seguenti ipotesi: 1)  $\alpha = 1, \beta = 0$ ; 2)  $\alpha = 0, \beta = 1$  (in questo caso il sistema non è completo su  $FD$ , ma ha come funzione ortogonale soltanto la costante); 3)  $\alpha = 1, \beta = 0$  in una parte  $F_1 D$  di  $FD$ ,  $\alpha = 0, \beta = 1$  nella rimanente parte; 4)  $\alpha < 0, \beta = 1$ . Le superficie  $\Sigma_0, \dots, \Sigma_p$  si suppongono dotate di piano tangente e di curvature continue.

Luigi Amerio (Milano).

**Cotton, Émile: Sur la représentation asymptotique du potentiel newtonien.** Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 1, 13—25 (1950).

Dans  $R^3$  les potentiels newtoniens engendrés soit par des masses, soit par un ensemble de doublets situés à distance finie admettent au voisinage de l'infini un développement (1)  $V = \sum V_l$ , où  $V_l$  est un polynome harmonique inverse d'ordre  $-(l+1)$ . On sait que, pour tout  $l > 0$ , ces polynomes inverses s'expriment linéairement à l'aide de  $2l+1$  d'entre eux, appelés fondamentaux. Dans cet article posthume l'A. prend comme pol. inv. fond. les fonctions  $A_{mnp} = \sum \frac{(-1)^s}{m! n!} \frac{\partial^l}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p}$  [ $m+n+p=l$ ;  $p=0,1$ ;  $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ]. Ce choix permet d'obtenir le développement (1) d'une façon particulièrement rapide et élémentaire;  $V_l$  est de la forme  $\sum C_{mnp} A_{mnp}$ , et les coefficients  $C$  sont explicités à l'aide d'intégrales (moments harmoniques). Des précisions sont apportées notamment lorsque  $V = V(M)$  est l'angle solide sous lequel on voit de  $M$  un contour fermé donné. L'article se termine par quelques remarques sur la représentation de Maxwell-Sylvester des harmoniques solides.

Deny (Strasbourg).

**Pignedoli, Antonio: Sui potenziali logaritmici.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 10—13 (1949).

Etant connu le potentiel logarithmique  $V$  d'une couche de densité  $u$  distribuée sur une circonférence, l'A. exprime  $u$  en fonction de  $V$ . Horváth (Paris).

**Cicco, John De: Union-preserving transformations of higher order surface-elements.** Amer. J. Math. 69, 104—116 (1947).

Die vorliegende Arbeit gehört zu einer Reihe von Untersuchungen, worin Verf., meist in Zusammenarbeit mit Kasner, die Liesche Theorie der Berührungstransformationen weitgehend verallgemeinert. Die Verallgemeinerung liegt darin, daß an Stelle der Elemente 1. Ordnung solche höherer Ordnung herangezogen werden. Nachdem der Fall höherer Kurvenelemente bereits während des Krieges behandelt worden ist, werden jetzt Flächenelemente der Ordnung  $n$  des  $R_3$  betrachtet und Transformationen, die diese in gewöhnliche Flächenelemente 1. Ordnung verwandeln. Ein Flächenelement der Ordnung  $n$  wird durch die Größen  $(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{j, m-j}, \dots, p_{0n})$  definiert, wobei  $p_{j, m-j} = \partial^m z / \partial x^j \partial y^{m-j}$  ist. Die betrachteten Transfor-

mationen haben dann die Gestalt

$$(1) \quad X = X(x, y, z; p_{j, m-j}), \quad Y, Z, P, Q = \text{entsprechenden Funktionen,}$$

wobei  $X, Y, Z, P, Q$  die übliche Bezeichnung der Elemente 1. Ordnung im Bildraum ist.  $\infty^2$  Elemente  $n$ -ter Ordnung, die von 2 Parametern abhängen, bilden dann einen Elementverein, wenn

$$dz = p_{10} dx + p_{01} dy, \quad dp_{j, m-j} = p_{j+1, m-j} dx + p_{j, m-j+1} dy$$

längs der  $\infty^2$ -Gesamtheit erfüllt ist. Darunter fallen z. B. solche Gesamtheiten von Elementen  $n$ -ter Ordnung, die ein festes Element  $n-1$ -ter Ordnung gemein haben; sie heißen konische Elemente. Weitere spezielle  $\infty^2$ -Gesamtheiten sind die Streifen, bei denen der Punkt nur eine Kurve durchläuft. Wie bei Lie werden dann nur solche Transformationen (1) betrachtet, die Vereine erhalten, wofür sich Differentialbedingungen aufstellen lassen. Durch einfache Rangbedingungen einer aus (1) durch Ableitungen der  $X, Y, Z$ -Terme gebildeten Funktionalmatrix ergeben sich 3 Klassen solcher Transformationen: Allgemeine, halb- und ganzspezielle (intermediate und special genannt). Die ganzspeziellen Transformationen führen jedes konische Element wieder in ein solches, die halb-speziellen in einen Streifen über. Die folgende Diskussion ergibt dann, daß die allgemeine Berührungstransformation von einer, die halbspezielle von 2 und die spezielle von 3 Direktrixgleichungen abhängt. In Analogie zu dem Lieschen Fall hängen die Direktrixgleichungen dabei von  $X, Y, Z; x, y, z$  und den  $p$  bis zur Indexsumme  $n-1$  ab. Der letzte Abschnitt betrachtet dann noch Transformationen von Elementen der Ordnung  $n$  in solche 2. Ordnung, wozu man 8 Gleichungen an Stelle der 5 in (1) zu nehmen hat. Es ergibt sich, daß diese, wenn sie Vereine erhalten, im allein betrachteten allgemeinen Falle Erweiterungen einer vorher behandelten Transformation von Flächenelementen  $n-1$ -ter Ordnung auf solche 1. Ordnung sind.

Bureau (Hamburg).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

• Schmeidler, Werner: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. I: Lineare Integralgleichungen. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 22.) Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1950. XII, 611 S., DM 38.—.

Niemand, der über lineare Integralgleichungen arbeiten oder eine gediegene Vorlesung halten will, wird an diesem umfassendsten modernen Lehrbuch in deutscher Sprache vorbeigehen dürfen. In den Jahren 1942—1945 geschrieben, berücksichtigt das Buch die vorhandene Literatur in fast enzyklopädischer Weise und geht vor allem auch auf die Anwendung der Theorie in zahlreichen Beispielen ein. — Besonders begrüßenswert ist es, daß endlich eine lehrbuchmäßige Theorie der linearen Integralgleichung erster Art

$$(1) \quad \int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s) \quad (c \leq s \leq d)$$

vorliegt, in die auch neue Ergebnisse des Verf. eingearbeitet sind. Dabei sei  $f(s)$  quadratisch integabel im Lebesgueschen Sinne, und über  $K(s, t)$  werden die Forderungen eingeführt:

- I.  $\int_a^b K(s, t) y(t) dt$  ist für jedes quadratisch integrable  $y(t)$  quadratisch integabel  $s$  in
- II.  $\int_c^d K(s, t) x(s) ds$  ist für jedes quadratisch integrable  $x(s)$  quadratisch integabel in  $t$ ;
- III. 
$$\int_c^d x(s) \int_a^b K(s, t) y(t) dt ds = \int_a^b y(t) \int_c^d K(s, t) x(s) ds dt.$$

Methode: Entwicklung nach je einem vollständigen Orthogonalsystem in  $s$  und  $t$ . Die homogene Integralgleichung hat nun entweder nur die Lösung  $y^*(t) = 0$ , oder es gibt ein normiertes orthogonales Lösungssystem  $y_1^*(t), y_2^*(t), \dots$  aus endlich oder unendlich vielen Funktionen; Anzahl der Funktionen = hinterer Defekt von  $K(s, t)$ . Analog  $x_1^*(s), x_2^*(s), \dots$  [Anzahl = vorderer Defekt von  $K(s, t)$ ] für die transponierte homogene Gleichung

$$(2) \quad \int_c^d K(s, t) x(s) ds = 0.$$

Beide Orthogonalsysteme sind unvollständig; sie lassen sich zu vollständigen Orthogonalsystemen  $\varphi_\alpha(s), \psi_\beta(t)$  so erweitern, daß die Kernmatrix die Normalform

$$(a_{\alpha\beta}) = \left( \int_c^d \int_a^b K(s, t) \bar{\varphi}_\alpha(s) \psi_\beta(t) ds dt \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{I}_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



besitzt, in der die „Normalbestandteile“  $\mathbf{I}_n$  quadratische Matrizen mit endlich oder abzählbar vielen Elementen sind, die in der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente besitzen und außerdem noch evtl. von Null verschiedene Zahlen nur in der darunterstehenden Parallelschrägzeile; die Anzahl der auftretenden Nullzeilen bzw. -Spalten ist gleich dem vorderen bzw. hinteren Defekt des Kerns. Durch evtl. Abänderung der Orthogonalsysteme lassen sich die Normalbestandteile mit endlich vielen Elementen auf lauter eingliedrige transformieren. — Hauptsatz: Zur quadratisch integrierbaren Lösbarkeit von (1) ist notwendig und hinreichend, daß

$$a) \quad \int_c^d f(s) x^*(s) ds = 0 \quad \text{für jede Lösung } x^*(s) \text{ von (2),}$$

b) für jeden Bestandteil  $\mathbf{I}_n$  der Normalform der Kernmatrix die Quadratsumme der Elemente von  $\mathbf{I}_n^{-1} f_n$  und die Summe aller dieser Quadratsummen über  $n$  konvergiert; dabei bedeutet  $f_n$  den Vektor der Fourierkoeffizienten von  $f(s)$  in bezug auf die dem Bestandteil  $\mathbf{I}_n$  entsprechenden Funktionen des Orthogonalsystems in  $s$ ,  $\mathbf{I}_n^{-1}$  die inverse Matrix zu  $\mathbf{I}_n$ , die sich durch rekursive Auflösung des zugehörigen Gleichungssystems leicht bestimmen läßt. — Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse in dem Fall, daß alle Normalbestandteile eingliedrig sind. Für Hermitesche Kerne  $[K(t, s) = K(s, t)]$  wird die Theorie bis zum Existenzbeweis der Eigenwerte und Eigenfunktionen ausgedehnt. — Abgesehen von der eben skizzierten Hauptmethode wird über zahlreiche andere Methoden referiert; eine Fülle von Beispielen wird entweder der Theorie vorangeschickt oder als Anwendung der Theorie behandelt, wobei unter anderem Reihenentwicklungen des Kerns und der rechten Seite zur Sprache kommen. — Für die lineare Integralgleichung zweiter Art

$$(3) \quad y(s) + \int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s)$$

ergeben sich nun unmittelbar die Hauptsätze, falls  $K(s, t)$  den früheren drei Bedingungen genügt und eine vollstetige Kernmatrix besitzt. Aber auch die Theorie nach Fredholm und nach S. Lewin (Integralgleichungen und Funktionalräume) wird gebracht, ferner die Neumannsche Reihe, Volterrasche Integralgleichungen, Entwicklungsprobleme, asymptotisches Verhalten der Eigenwerte, Anwendungen auf Randwertprobleme gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, Begründung der kinetischen Gastheorie nach Hilbert, zahlreiche Beispiele mit speziellen Kernen; praktische Behandlung, z. B. nach Nyström und nach Enskog, die Methoden von Collatz für den Fall Hermitescher Kerne. — Der Behandlung singulärer linearer Integralgleichungen zweiter Art mit Kernen, die den früheren drei Bedingungen genügen, werden bi-orthogonale Funktionensysteme zugrunde gelegt. Im Falle Hermitescher Integralgleichungen werden das Punkt- und Streckenspektrum diskutiert. Für reelle symmetrische Kerne, die den drei Forderungen nicht mehr genügen, wird die Carlemansche Theorie entwickelt. — Im kurzen Kapitel über die lineare Integralgleichung dritter Art wird nicht nur die Integralgleichung

$$(4) \quad a(s) y(s) - \int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s)$$

kurz gestreift, sondern auch allgemeinere beschränkte lineare Operatoren. Wieder zielen die Untersuchungen auf die Normalform der Kernmatrix hin. — Ein Anhang bringt in knapper Darstellung das notwendige mathematische Rüstzeug, wie Riemannsches, Lebesguesches und Stieltjessches Integral, Theorie der quadratisch integrierbaren Funktionen, das Hilbertsche Auswahlverfahren, lineare und bilineare Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten. Eine Zusammenstellung der behandelten Beispiele und ein ausführliches Literaturverzeichnis schließen das Buch ab. R. Iglish.

**Richard, Ubaldo:** *Rapporti tra le equazioni di Volterra e le serie di polinomi di Laguerre.* Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I. 83, 28—42 (1949).

Verf. betrachtet die Volterrasche Gleichung zweiter Art

$$\varphi(x) - \int_0^x K(x-y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Er entwickelt die Lösung in eine Reihe von Laguerreschen Polynomen und gibt hinreichende Kriterien für ihre gleichförmige Konvergenz an. Als Anwendung der Methode werden am Ende zwei Beispiele angeführt. Wolf Gross (Roma).

• **McLachlan, N. W.:** *Modern operational calculus with applications in technical mathematics.* Macmillan and Co., Ltd. 1948. XIV, 218 p. 21 s.

Das vorliegende Buch ist ein erfreuliches Zeichen dafür, daß sich bei den modernen Ingenieuren (der Verf. ist Ingenieur und nicht Mathematiker) die Erkenntnis durchgesetzt hat, daß 1. der Heaviside-Kalkül nunmehr endgültig ad acta gelegt werden kann und statt dessen

die Laplace-Transformation (L.T.) zu benutzen ist („The L.T. method . . . being logical and unambiguous, it is all preferable to that of Heaviside, which may now be laid to rest in all its glory — such is the march of scientific progress!“), und 2. der heutige Ingenieur, der bei seinen technischen Hilfsmitteln mit hoher Präzision rechnet, vernünftigerweise denselben Standpunkt gegenüber seinem mathematischen Handwerkszeug einnehmen muß („The accuracy of the ingeneer is analogous to the rigour of the mathematician“). Deshalb tut der Verf. die bei der Anwendung der L.T. so häufig vorkommenden Vertauschungen von uneigentlichen Integralen, von Integralen mit Summen, von Differentiationen mit Integralen usw. nicht mit der üblichen großartigen Handbewegung ab, sondern legitimiert sie mit Hilfe von Sätzen, die er aus guten mathematischen Werken wie dem Reichenbuch von Bromwich entnommen und in einem längeren Anhang (39 Seiten umfassend gegenüber 144 Seiten eigentlichen Textes!) zusammengestellt hat. Bemerkenswert ist auch, daß der Verf., der 1939 ein Buch über denselben Gegenstand veröffentlichte, in dem nach dem Vorbild von Bromwich und K. W. Wagner die Darstellung der Lösung einer Differentialgleichung durch ein komplexes Integral ganz im Vordergrund stand, sich nunmehr auch zu der vom Ref. stets verfochtenen Ansicht bekehrt hat, daß zunächst die L.T. auf die Gleichung anzuwenden ist und daß das komplexe Integral als „Umkehrintegral“ an das Ende des Lösungsprozesses gehört, um bei Versagen der vorhandenen Tabellen von Korrespondenzen als Ausgangspunkt für analytische Darstellungen der Lösungen zu dienen; in dem vorliegenden Buch kommt das komplexe Integral nur ganz ge-

legentlich vor. — Zu bedauern ist, daß der Verf. nicht die eigentliche L.T.  $\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \mathfrak{L}\{f\}$ ,

sondern die mit  $p$  multiplizierte:  $\varphi(p) = p \mathfrak{L}\{f\}$  zugrunde legt, obwohl sich in der amerikanischen, französischen, englischen, italienischen und zum größten Teil auch der deutschen Literatur die L.T. in der eigentlichen Form allgemein durchgesetzt hat. Die von manchen Technikern, so auch vom Verf., vorgebrachte Begründung, daß  $\varphi(p)$  für Potenzen  $f(t) = t^\nu$  mit der Heavisideschen Operatorform übereinstimme und daß  $f$  und  $\varphi$  dieselbe Dimension hätten, ist nicht durchschlagend. Das Einzige, was man m. E. zugunsten der Wahl von  $\varphi$  vorbringen kann, ist, daß bei ihr das Abbild der in manchen Gebieten der Elektrotechnik oft vorkommenden Bildung

$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda$  (die aber beim Verf. nur ganz gelegentlich einmal auftritt) einfacher wird

als bei der eigentlichen L.T. Dafür werden aber alle anderen Abbildungseigenschaften, die bei Differential- und Integralgleichungen gebraucht werden, komplizierter, und es ist charakteristisch, daß der Verf. bei Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten doch zur eigentlichen L.T. seine Zuflucht nimmt. Was den zugrunde gelegten Funktionsbegriff angeht, so beschränkt sich der Verf. auf Funktionen, die stückweise stetig sind, bei  $t = 0$  höchstens wie  $t^{-\nu}$ ,  $0 < \nu < 1$ , unendlich werden und für  $t \rightarrow \infty$  der Bedingung  $f(t) = O(e^{p_0 t})$  genügen. Das reicht in der Tat für die Anwendungen auf Differentialgleichungen aus, da jede Funktion, deren Ableitung eine L.T. besitzt, der letzten Bedingung genügt. Nur hätte diese Voraussetzung deutlicher formuliert werden müssen, als es im Text (gelegentlich der Behandlung des Konvergenzbereichs) geschieht, wie überhaupt die zwei einleitenden Kapitel über die grundlegenden Eigenschaften der L.T. daran krankten, daß Wichtiges und Unwichtiges in derselben gleichförmigen Art, ohne scharfe Absetzung und Systematik, aneinandergereiht ist. An Anwendungen der L. T. werden folgende Gegenstände behandelt. III. Kap.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. IV. Kap.: Partielle Differentialgleichungen: Wärmeleitungsgleichung, eindimensionale Wellengleichung in zähen Medien, zweidimensionale Wellengleichung, Telegraphengleichung, letztere mit ausführlicher physikalischer Deutung der Lösung. V. Kap.: Auswertung von Integralen (vermittels

des Abelschen Stetigkeitssatzes, auf Grund der Formel  $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\varphi(p)}{p} dp$ , usw.), Her-

stellung von Funktionalrelationen (z. B. mittels des Faltungssatzes), Reihenentwicklungen (durch gliedweise Transformation). VI. Kap.: Berechnung von Laplace-Transformierten durch verschiedene Kunstgriffe. VII. Kap.: L.T. von Funktionen, die außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden, von periodischen Funktionen, von Impulsen (Diracfunktionen). — Außer dem erwähnten umfangreichen mathematischen Anhang enthält das Buch noch 24 Seiten Aufgaben und eine Liste von rund 80 Korrespondenzen. Erfreulich ist, daß der Verf. sich überall bemüht, neue Beispiele zu behandeln und nicht bloß die seiner Vorgänger zu reproduzieren. Überaus viele Anwendungsbeispiele sind dem Bereich der Besselfunktionen entnommen, die ja heutzutage in der Technik eine fundamentale Rolle spielen. — Da das Buch aus der Begriffswelt des Ingenieurs erwachsen ist, wird es sicher in Ingenieurkreisen weite Verbreitung finden und dort wegen seiner eingangs geschilderten Tendenzen viel Gutes stiften. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre zu wünschen, daß noch manche verschwommene Begriffsbildungen schärfer präzisiert würden (so verhindert z. B. die Festsetzung „Throughout the text a continuous function means one which is differentiable“, S. XIII, eine klare Interpretation der späteren Sätze), und daß der Verf. eine Anzahl von Entgleisungen, die nichts mit einem größeren oder kleineren



Maß von „Strenge“ zu tun haben, sondern wirklich Fehler sind, ausmerzte, so z. B. die Behauptung, daß der Wert eines Faltungsintegrals  $\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda = f_1 * f_2$  (warum der Verf. sich die letztere, international eingebürgerte Abkürzung entgehen läßt, ist übrigens nicht zu verstehen) für  $t=0$  verschwinde (siehe 39, 41), wo es sich in Wahrheit um den Grenzwert für  $t \rightarrow 0$  handelt (Gegenbeispiel:  $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = 1$ ); die falsche Umkehrung von Sätzen Abelscher Art (irrtümlicher Schluß vom asymptotischen Verhalten der Bildfunktion für  $p \rightarrow \infty$  auf das der Originalfunktion für  $t \rightarrow 0$ , S. 46); der öfters auftretende Trugschluß, die Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung mittels des Lerchschen Satzes beweisen zu wollen (es könnte ja Lösungen geben, die keine L. T. besitzen); die Verwechslung von „some interval“ bzw. „the interval“ mit „any interval“ in den Sätzen des mathematischen Anhangs (S. 28, 175).

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Schoenberg, I. J.: On Pólya frequency functions. II: Variation-diminishing integral operators of the convolution type. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 97—106 (1950).

Th. Motzkin leitete in seiner Dissertation [Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen, Basel 1936; dies. Zbl. 14, 246] die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ab, daß eine lineare Transformation  $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ,  $i=1, \dots, m$ , variationsvermindernd ist, d. h. daß die Anzahl  $v(y_i)$  der Vorzeichenwechsel der Folge  $(y_i)$  stets  $\leq v(x_k)$  ist. Unter Verwendung dieser Resultate wird folgendes kontinuierliche Analogon untersucht: Für beliebige stetige beschränkte  $f(x)$  und Funktionen  $L(t)$  von beschränkter Schwankung in  $(-\infty, +\infty)$  mit  $L(-\infty) = 0$ ,  $2L(t) = L(t+0) + L(t-0)$ , wird die Integraltransformation

$$(1) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) dL(t)$$

betrachtet. Für  $f(x)$  läßt sich  $v(f)$  als  $\sup_S v(f(x_i))$  erklären, wenn  $S$  alle endlichen Folgen  $x_1, \dots, x_n$  durchläuft. (1) heißt wieder variationsvermindernd, wenn stets  $v(g) \leq v(f)$ . Es gilt nun, daß (1) dann und nur dann variationsvermindernd ist, wenn  $L(t)$  eine Treppenfunktion mit nur einem Sprung ist oder die Gestalt  $L(t) = \pm \int_{-\infty}^t A(u) du$  hat,  $A(u)$  eine Pólyasche Häufigkeitsfunktion, d. h. eine meßbare Funktion mit  $0 < \int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx < \infty$ , für die für beliebige  $x_1 < \dots < x_n$ ,  $t_1 < \dots < t_n$  die Determinante  $|\Lambda(x_i - t_j)|$  stets  $\geq 0$  ist. G. Köthe (Mainz).

Poli, Louis: Règles pour le calcul symbolique. Nouveau théorème du produit. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I 63, 155—164 (1949).

Indicata con  $f(p)$  l'immagine nel senso di Carson-Heaviside della funzione  $h(t)$ , l'A. da in questa Nota: L'originale di  $f(\sqrt{p})$  e di  $f(p^2)$ , l'immagine di  $h(\sqrt{t})$  e di  $h(t^2)$  ed un nuovo teorema del prodotto. C. Miranda (Napoli).

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Fichera, Gaetano: Estensioni e sviluppi del concetto di funzione continua nell'analisi moderna. Archimede, Firenze 2, 1—7 (1950).

Einführende Skizze der Anwendung topologischer Begriffe und Methoden in der Funktionalanalysis (ohne Literaturangaben). Haupt (Erlangen).

Pini, Bruno: Convergenza, fattori di convergenza, convergenza generalizzata per determinanti infiniti. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 160—185 (1948).

I determinanti infiniti possono riguardarsi come serie i cui termini son serie multiple. Epperò l'A. si pone, per essi, il problema dei fattori di convergenza,

analogamente a quanto si fa per le serie multiple. All'uopo, l'A. è indotto ad introdurre per i determinanti infiniti un concetto di convergenza semplice, intermedio fra quelli di convergenza assoluta secondo von Koch e di convergenza secondo Hill. Precisamente, dato il determinante infinito

$$A = \begin{vmatrix} 1 + a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \dots \\ a_{2,1}, & 1 + a_{2,2}, & a_{2,3}, \dots \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 1 + a_{3,3}, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

l'A. pone

$$\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1, i_1}, \dots, a_{i_1, i_p} \\ \dots \dots \dots \\ a_{i_p, i_1}, \dots, a_{i_p, i_p} \end{vmatrix} \quad (i_1 < \dots < i_p)$$

e chiama  $A$  semplicemente convergente se: 1. la serie  $\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{\infty} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix}$  è convergente nel senso di Stolz-Pringsheim e con somme parziali limitate, qualunque sia il numero naturale  $p$ ; 2. la serie degli estremi superiori,  $L^{(p)}$ , dei valori assoluti di

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \dots \sum_{i_p=1}^{m_p} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix} \quad (m_1 < m_2 < \dots < m_p)$$

è convergente. — Date poi due successioni di funzioni  $\{\alpha_n(P)\}$  e  $\{\beta_n(P)\}$  di un punto  $P$  variabile in un insieme  $E$  di uno spazio euclideo, l'A. considera il determinante

$$B(P) = \begin{vmatrix} 1 - \alpha_{1,1}(P) \beta_1(P), & \alpha_{1,2}(P) \beta_2(P), \dots \\ \alpha_{2,1}(P) \beta_1(P), & 1 + \alpha_{2,2}(P) \beta_2(P), \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

e dimostra i seguenti teoremi: I) Condizione necessaria e sufficiente affinché  $B(P)$  converga semplicemente, ogni volta che per  $A$  sussiste la condizione 2. è che, posto  $\gamma_i(P) = \alpha_i(P) \cdot \beta_i(P)$  e  $\Delta \gamma_i(P) = \gamma_i(P) - \gamma_{i+1}(P)$ , sia  $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta \gamma_i(P)| < C(P)$ , con  $C(P)$  funzione positiva di  $P$  su  $E$ , e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(P) = 0$  per ogni punto  $P$  di  $E$ ; II. Se  $A$  è semplicemente convergente, il determinante  $B(P)$  converge semplicemente in tutto  $E$  e tende verso  $A$  al tendere di  $P$  al punto  $P^0$ , d'accumulazione per  $E$ , se oltre alle condizioni del teorema precedente le  $\gamma_i(P)$  soddisfanno anche alle condizioni seguenti: ciascuna delle  $\gamma_i(P)$  tende verso 1 al tendere di  $P$  a  $P^0$  e in un conveniente intorno di  $P^0$  le funzioni

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta \gamma_i(P)|, \quad \prod_{h=1}^n \sum_{i=h}^{\infty} |\Delta \gamma_i(P)| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

si mantengono equilibrate. Questo secondo teorema conduce in modo del tutto naturale a porre un concetto di convergenza generalizzata. Nel corso del lavoro l'Autore porge anche una formulazione generale del problema dei fattori di convergenza: il caso trattato dall'A. è un caso particolare nel quale si riesce a pervenire a risultati semplici.

Giuseppe Scorza-Dragoni (Padova).

Wilansky, Albert: An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 59—68 (1949).

Die Arbeit verallgemeinert Resultate von Banach, Mazur und Steinhaus über multiplikative Summationsmatrizen. Bekanntlich ist eine Matrix konservativ, d. h. führt jede konvergente Folge  $x = \{x_n\}$  wieder in eine konvergente Folge  $Ax$  über, wenn  $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$  ist und  $(A) \supset F$  ist; dabei bedeutet  $(A)$  die Menge aller  $x$ , für die  $Ax$  konvergent ist, und  $F$  besteht aus den Folgen  $\{1, 1, \dots\}$ ,



$\delta^{(1)} = \{1, 0, 0, \dots\}$ ,  $\delta^{(2)} = \{0, 1, 0, \dots\}$ , ... ( $A$ ) wird als metrischer Raum aufgefaßt mit  $\|x\| = \sup_n \left| \sum_k a_{nk} x_k \right|$ . Ist  $A$  normal, d. h. eine Dreiecksmatrix mit  $a_{nn} \neq 0$  für alle  $n$ , so ist ( $A$ ) ein Banachraum. ( $A$ ) ist in jedem Fall separabel. Es werden die linearen Funktionale auf  $A$  betrachtet. Einer konservativen Matrix wird die Zahl  $\varrho(A) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk}$  zugeordnet. Ist  $\varrho(A) \neq 0$ , so heißt

$A$  co-regulär, andernfalls co-null. Jede normale, co-null Matrix summiert auch divergente Folgen. Zwei normale konservative Matrizen  $A, B$  mit  $(A) = (B)$  sind entweder beide co-regulär oder co-null. Eine co-reguläre Matrix summiert nicht jede beschränkte Folge. Eine Folge  $\{x_r\}$  heißt orthogonal zu  $A$ , wenn  $\sum_r \alpha_r a_{rk} = 0$  für jedes  $k$ . Hat  $A$  keine orthogonale Folge, so heißt es vom Typ  $M$ .

Ist  $(A) = (B)$ ,  $A, B$  konservativ und normal, so sind beide vom Typ  $M$  oder beide nicht. Dann und nur dann ist eine co-reguläre normale Matrix  $A$  konsistent mit jeder Matrix  $B$  mit  $(B) \supset (A)$  und  $B$  gleich  $A$  auf  $F$ , wenn  $A$  vom Typus  $M$  ist. Eine normale co-reguläre Matrix ist dann und nur dann vom Typus  $M$ , wenn die Spalten von  $A$  und die Folge  $\left\{ \sum_k a_{nk} \right\}$  eine Basis aller konvergenten Folgen bilden

in dem Sinn, daß zu jeder konvergenten Folge  $\{x_n\}$  und jedem  $\varepsilon > 0$  eine endlich Linearkombination  $y$  der Basiselemente existiert mit  $|y_n - x_n| < \varepsilon$  für  $n = 1, 2, \dots$

G. Köthe (Mainz).

**Tatarkiewicz, Kyrzysztot:** Sur la convexité des sphères et sur l'approximation dans les espaces de Banach. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1332—1333 (1948).

$C$  désigne un espace de Banach,  $\delta(x)$  la norme de  $x$ ,  $L$  une variété linéaire de dimension finie,  $A(x)$  l'ensemble (non vide) des vecteurs  $l$  de  $L$  tels que  $\delta(x - l)$  soit minimum.  $A(x)$  comprend un seul vecteur si  $\delta$  est strictement convexe [Voir R. Fortet, Bull. Soc. Math. France **69**, 23—46 (1941); ce Zbl. **26**, 324]. Si  $x_n \rightarrow x$ ,  $A(x_n) \rightarrow A(x)$ .

Chr. Paue (Le Cap).

**Nachbin, Leopoldo:** A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Trans. Amer. math. Soc. **68**, 28—46 (1950).

Soit  $E$  un espace normé; on dit que  $E$  possède la propriété de prolongement si, pour chaque espace normé  $X$  et chaque sous-espace  $Y$  de  $X$ , toute fonction linéaire continue définie sur  $Y$  et à valeurs dans  $E$  peut être prolongée à  $X$  linéairement, continuellement et en conservant sa norme. Le théorème de Hahn-Banach peut alors s'énoncer: tout espace normé à une dimension possède la propriété de prolongement. L'A. démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace normé  $E$  possède la propriété de prolongement est que tout ensemble de sphères de  $E$ , dont chaque couple a un point commun, a une intersection non vide. L'A. démontre ensuite quelques théorèmes de structure: l'isomorphisme de certains de ces espaces (dans le sens vectoriel et de la norme) à l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur un espace de Hausdorff compact dont l'adhérence de chaque ensemble ouvert est un ensemble ouvert; leur rapport avec les lattices vectoriels complets et avec les algèbres de Boole complètes. Finalement, quelques questions non résolues sont indiquées.

Pereira Gomes (Nancy).

**Dieudonné, J.:** Natural homomorphisms in Banach spaces. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 54—59 (1950).

Es sei  $E$  ein Banachraum,  $G$  ein abgeschlossener linearer Teilraum von  $E$ ,  $L$  der Orthogonalraum von  $G$  in  $E^*$ . Es existiert dann ein natürlicher Homomorphismus  $\Gamma$  von  $E^*$  auf  $G^*$  mit dem Kern  $L$ . In einer früheren Note [Bull. Amer. math. Soc. **54**, 776—781 (1948); dies. Zbl. **32**, 214] untersuchte M. E. Munroe, für welche Topologien  $T$  eine offene Abbildung ist. Verf. ergänzt diese Ergebnisse, er beweist, daß  $T$  auch für die beschränkte schwache und für die beschränkte schwache \*-Topologie offen ist. Dabei wird die beschränkte schwache \*-Topologie von  $E^*$  gegeben

durch die Umgebungen der Null, die die polaren Mengen zu den starkkompakten Teilmengen von  $E$  sind, die beschränkte schwache Topologie von  $E^*$  analog durch die polaren Mengen zu den starkkompakten Teilmengen von  $E^{**}$ . Ein Irrtum von Munroe wird berichtigt. *G. Köthe (Mainz).*

**Dieudonné, Jean et Laurent Schwartz:** La dualité dans les espaces  $(F)$  et  $(LF)$ . Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble **1**, 61—101 (1950).

Ein  $(F)$ -Raum ist ein komplexer linearer lokalkonvexer, metrisierbarer und vollständiger Raum. Seine Topologie wird durch eine Folge  $p_n(x)$  wachsender Halbnormen gegeben. Beispiele sind die gestuften Räume (vgl. Ref., dies. Zbl. **31**, **34**), ferner der Raum  $D_K$  der auf einem kompakten Intervall  $K$  der Zahlengeraden  $\mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit den Halbnormen  $p_n(x) = \sup_{0 \leq i \leq n} |x^{(i)}(t)|$ . Ein  $(LF)$ -Raum entsteht folgendermaßen: Eine echt aufsteigende Folge  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  von  $(F)$ -Räumen  $E_n$  mit den Topologien  $\mathfrak{T}_n$  sei gegeben, und  $\mathfrak{T}_{n+1}$  induziere auf  $E_n$  die Topologie  $\mathfrak{T}_n$ . Die Vereinigungsmenge  $E$  der  $E_n$  wird ein  $(LF)$ -Raum, wenn man als Umgebungen der Null alle absolutkonvexen Mengen  $W$  nimmt, für die  $W \cap E_n$  eine  $\mathfrak{T}_n$ -Umgebung der Null in  $E_n$  ist. Der Raum  $D$  aller auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die außerhalb irgendeines kompakten Intervalls verschwinden, bilden einen  $(LF)$ -Raum. Sein dualer Raum ist der Raum der Distributionen von L. Schwartz [vgl. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Actual. sci. industr. Nr. 1091 (1950)], und das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist vor allem die Grundlegung dieser Theorie. Ein großer Teil der Sätze der Banachschen Theorie wird auf die  $(F)$ - und  $(LF)$ -Räume übertragen. Ist  $E$  ein  $(LF)$ -Raum,  $E_n$  eine Definitionsfolge, so ist eine Menge  $A$  in  $E$  dann und nur dann beschränkt, wenn sie in einem  $E_n$  liegt und dort beschränkt ist. Eine lineare Abbildung  $A$  von  $E$  in einen lokalkonvexen Raum ist dann und nur dann stetig, wenn sie in jedem  $E_n$  stetig ist. Sind  $E$  und  $F$  zwei  $(LF)$ -Räume, so ist eine lineare Abbildung von  $E$  auf  $F$  stets ein Homomorphismus. Der duale Raum  $E'$  besteht aus allen stetigen Linearfunktionen auf  $E$  und die starke Topologie  $\mathfrak{T}_b$  in  $E'$  ist die der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen aus  $E$ . Die schwache Topologie  $\mathfrak{T}_s$  ist die der gewöhnlichen Konvergenz auf den Elementen von  $E$ . In  $E'$  fallen die stark und schwach beschränkten Mengen mit den relativ schwach kompakten Mengen zusammen.  $E$  heißt halbreflexiv, wenn  $E = E''$  (letzteres bezüglich  $\mathfrak{T}_b$  gebildet), reflexiv, wenn überdies die Topologie von  $E$  mit der von  $E''$  übereinstimmt. Ein  $(F)$ - oder  $(LF)$ -Raum ist dann und nur dann reflexiv, wenn in  $E$  jede beschränkte, schwach abgeschlossene Menge schwach kompakt ist. Auf  $E'$  sei  $\mathfrak{T}_c$  die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den stark kompakten Mengen des  $(LF)$ -Raumes  $E$ .  $E'$  ist  $\mathfrak{T}_c$ -vollständig, und  $\mathfrak{T}_c$  ist die feinste Topologie auf  $E'$ , die auf jeder beschränkten Teilmenge von  $E'$  mit der schwachen Topologie übereinstimmt. Daraus folgt in Verallgemeinerung eines Banachschen Satzes, daß ein linearer Teilraum  $H$  von  $E'$  schwach abgeschlossen ist, wenn  $H \cap K$  schwach kompakt ist für jede beschränkte und schwach abgeschlossene Teilmenge  $K$  von  $E'$ . Mit dem Satz, daß eine auf jeder beschränkten Menge von  $E'$  schwach stetige Linearfunktion auf ganz  $E'$  schwach stetig ist, wird bewiesen, daß jeder  $(LF)$ -Raum vollständig ist. In Verallgemeinerung eines Satzes von W. Eberlein (dies. Zbl. **29**, **269**) wird bewiesen, daß in jedem  $(LF)$ -Raum  $E$  eine Menge  $A$ , von der jede Teilfolge eine schwache Häufungsstelle in  $E$  besitzt, schwach kompakt ist. Für eine lineare stetige Abbildung  $u$  eines  $(F)$ -Raumes  $E$  in einen  $(F)$ -Raum  $F$  sind gleichwertig a)  $u$  ist ein starker Homomorphismus, b)  $u$  ist ein schwacher Homomorphismus, c)  $u(E)$  ist abgeschlossen, d)  $u'$  ist ein schwacher Homomorphismus, e)  $u'(F')$  ist schwach abgeschlossen. Ist  $u(x', y')$  eine Bilinearfunktion, die  $E'_1 \times E'_2 [E_1, E_2 (F)$ -Räume] in  $G'$  [ $G$  ein  $(F)$ - oder  $(LF)$ -Raum] abbildet, und sind die Abbildungen  $y' \rightarrow u(x', y')$  und  $x' \rightarrow u(x', y')$  schwach stetig in  $E'_2$  bzw.  $E'_1$ , so ist  $u$  eine stark



stetige Abbildung von  $E'_1 \times E'_2$  in  $G'$ . Die Arbeit schließt mit der Angabe einer Reihe ungelöster Probleme. G. Köthe (Mainz).

**Dieudonné, Jean et Alfredo Pereira Gomes:** Sur certains espaces vectoriels topologiques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1129—1130 (1950).

In Verallgemeinerung der gestuften Räume des Ref. (dies. Zbl. **31**, 34) wird für  $r \geq 1$  und Zahlen  $b_{mn} > 0$  der Raum  $E$  aller Folgen  $(u_n)$  betrachtet mit  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n|^r < \infty$ . Mit den Halbnormen  $p_m(u) = \left( \sum_n b_{mn} |u_n|^r \right)^{1/r}$  werden sie separable Räume vom Typus  $(F)$ . Sie sind reflexiv, und  $E'$  besteht aus allen Folgen  $(x_n)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{s/r} |x_n|^s < \infty$  ( $s = r/(r-1)$ ) für irgendein  $m$ . Es wird ferner eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, wann sie vom Typus  $(M)$  sind, d. h. wann jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge stark kompakt ist. G. Köthe.

**Lorentz, G. G.:** Some new functional spaces. Ann. Math., Princeton, II. S. **51**, 37—55 (1950).

$A(\alpha)$  [resp.  $M(\alpha)$ ], où  $0 < \alpha < 1$ , est l'espace des fonctions réelles mesurables  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , telles que  $\|f\|_{A(\alpha)} = \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} f^*(x) dx < +\infty$ ,  $f^*(x)$  étant la fonction décroissante et équimesurable à  $f(x)$

$$\left( \text{resp. } \|f\|_{M(\alpha)} = \sup_e \left[ (me)^{-\alpha} \int_e |f(x)| dx \right] < +\infty \right).$$

$A(\alpha)$  et  $M(\alpha)$  sont des espaces de Banach. Il y a correspondance biunivoque entre les  $g \in M(\alpha)$  et les formes linéaires continues  $\Phi$  sur  $A(\alpha)$ , cette correspondance étant définie par  $\Phi(f) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ ; on a  $\|\Phi\| = \|g\|_{M(\alpha)}$ , de sorte que  $M(\alpha)$  est le dual de  $A(\alpha)$  [mais  $A(\alpha)$  n'est pas le dual de  $M(\alpha)$ ]. Pour deux espaces vectoriels normés  $X, Y$ , dont les éléments sont des fonctions mesurables sur  $[0, 1]$ , écrivons  $X \prec Y$  si  $X \subset Y$  et si  $\|f\|_Y \leq K \|f\|_X$  pour  $f \in X$ ; alors  $A(\alpha) \prec L_{\alpha-1} \prec M(1-\alpha) \prec A(\alpha')$  si  $\alpha' > \alpha$ . Ainsi  $A(\alpha)$  [resp.  $M(\alpha)$ ] est „voisin“ de  $L_{\alpha-1}$  (resp.  $L_{(1-\alpha)-1}$ ). L'auteur applique ces résultats aux séries trigonométriques, à l'intégration d'ordre fractionnaire et au problème des moments. Par exemple, il caractérise complètement la suite des moments d'une fonction de  $A(\alpha)$  ou de  $M(\alpha)$ . Quelques espaces plus généraux sont signalés. Dixmier (Paris).

**Pellegrino, Franco:** Su un'importante classe di funzionali analitici non definiti per le costanti e su una generalizzazione della serie di Lagrange. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. **7**, 484—502 (1948).

Si considera la classe  $\Omega$  dei funzionali analitici, per i quali vale, per qualunque  $h$  appartenente a un opportuno intorno di  $t = 0$ , la relazione funzionale

$$(1) \quad F[y(t+h)] = F[y(t)] - h,$$

rilevando, innanzi tutto, che non esistono nè funzionali lineari nè funzionali omogenei di grado  $m$ , con  $m \neq 0$ , appartenenti a  $\Omega$ . — Tenuto presente che in altro proprio lavoro (Sui funzionali del ciclo chiuso più generali, . . . , Collectanea Mathematica, Barcellona) l'A. ha chiamato funzionale del ciclo chiuso ogni funzionale analitico misto a  $\lambda$  parametri  $F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_\lambda]$  il quale, per qualunque  $\omega$ , soddisfa la relazione

$$F[y(t+\omega); z_1, z_2, \dots, z_\lambda] = F[y(t); z_1 + \omega, z_2 + \omega, \dots, z_\lambda + \omega],$$

l'A. dimostra che i funzionali della classe  $\Omega$  sono primitivi di quelli del ciclo chiuso; inoltre stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché un funzionale analitico  $F$  appartenga alla classe  $\Omega$  è che per una particolare funzione di ognuna delle parti connesse, in cui eventualmente si spezza la regione di  $F$ ,  $F$  soddisfi alla (1), e inoltre in tale particolare funzione tutti i suoi derivati soddisfino alla condizione del

ciclo chiuso. — Infine l'A. considera quei particolari funzionali  $Z[f(t)]$  della classe  $\Omega$ , che fanno corrispondere a ogni funzione del proprio campo di definizione uno zero semplice della funzione stessa, e ottiene per essi uno sviluppo in serie che generalizza la nota serie di potenze di Lagrange. *S. Cinquini* (Pavia).

**Pellegrino, F.:** Die analytischen Funktionale und ihre Anwendungen. Mat. Tidsskr. B, København 1949, 31—62 (1949).

L'A. espone i fondamenti della teoria dei funzionali analitici (secondo Fantappiè) con speciale riferimento a quelli lineari, e rende conto della loro applicazione al calcolo simbolico degli operatori di Heaviside, al calcolo delle matrici di funzioni e all'effettiva integrazione di equazioni differenziali a derivate parziali. L'esposizione termina con un rapido sguardo ai funzionali analitici non lineari. *S. Cinquini*.

**Barriecelli, Nils Aall:** L'intégrale relative d'une fonctionnelle et ses applications dans la théorie de la distribution de probabilité d'une courbe. Arch. Math. Naturv., Oslo 49, Nr. 3, 35—117 (1947).

Verf. betrachtet solche Funktionale  $F[x(t)]$  der auf einem abgeschlossenen Intervall  $\langle a, b \rangle$  definierten Funktionen  $x(t)$ , welche „für unstetige Funktionen verschwinden“. Sind  $\vartheta_r$  äquidistante Teilpunkte von  $\langle a, b \rangle$  und  $\vartheta_{r-1} < t_r < \vartheta_r$  mit  $x_r = x(t_r)$ , dann wird  $\{F_n(x_1, \dots, x_n)\}$  eine asymptotische Folge von  $F[x(t)]$  genannt, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1, \dots, x_n) = F[x(t)]$  ist. Bezeichnen schließlich  $p_r, q_r, \varphi_r, q_r$  die Werte von vier Funktionen  $p(t) \leq \varphi(t) \leq \psi(t) \leq q(t)$  in  $\langle a, b \rangle$  an den Stellen  $t_r$ , dann wird der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{\varphi_1}^{\varphi_1} \cdots \int_{\varphi_n}^{\varphi_n} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right] \left/ \int_{p_1}^{q_1} \cdots \int_{p_n}^{q_n} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right|$$

im Falle seiner Existenz ein relatives Integral von  $F[x(t)]$  in  $\langle a, b \rangle$  genannt. — Diese eigenartigen, eher an Beispielen beleuchteten als theoretisch scharf umrissenen Begriffe werden dann auf Probleme folgender Art angewendet. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällige Kurve  $x(t)$  mit gegebener Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_n)$  und der Verteilungsdichte

$$F[x(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_1, \dots, x_n)}{F(v_1, \dots, v_n)}$$

„in bezug auf eine Musterkurve  $v(t)$ “ zwischen zwei gegebenen  $\varphi(t) \leq \psi(t)$  verläuft oder, falls sie absteigend ist, unter  $\varphi(t)$  gelangt, ohne früher  $\psi(t)$  zu unterschreiten. — Weitläufige Anwendungen auf Probleme des Ruins eines Spielers, der Fortpflanzung von Mutationen, der Gastheorie und der klimatischen Kurven beschließen die allgemein locker gehaltene Darstellung. *Szentmártony* (Budapest).

**Tulcea, Ionescu et G. Marinescu:** Sur certaines chaînes à liaisons complètes. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 667—669 (1948).

Es bezeichne 1.  $P(t, A)$  bei  $0 \leq P(t, A) \leq P(t, E) \leq 1$  für jedes  $t$  eines metrischen, vollständigen, kompakten Raumes  $S$  eine vollständig additive Funktion in den Elementen  $A$  eines Borelschen Körpers der Teilmengen einer Menge  $E$ , 2.  $y(t, x)$  eine für alle  $x \in E$  eindeutige Abbildung von  $S$  in sich, 3.  $f(t)$  ein Element eines Banachschen Funktionenraumes. Diese Funktionen sollen der Reihe nach durch eine Konstante, eine Konstante innerhalb  $(0, 1)$ ,  $m(f)$  — in  $A$  bzw.  $x$  gleichmäßig — beschränkte Differenzen-Koeffizienten bezüglich  $t$  besitzen, so daß  $\|f\| = m(f) + \max |f(t)|$  gesetzt werden kann. Der durch

$$T(f) = \int_E f[y(t, x)] P(t, dx)$$

definierte Operator  $T$  ist dann fast vollständig stetig mit gleichmäßig beschränkten  $\|T^n\|$  und besitzt im Falle  $P(t, E) = 1$  Eins als Eigenwert. — Wird nun  $E$  als Menge der Zustände  $x$  eines Zufallssystems,  $t = \{x_n\}_{n=0}^\infty$  und  $y(t, x)$  als Übergang von  $t$  in  $(\dots, x_{-1}, x_0, x)$  gedeutet, so kann im Falle  $P(t, E) = 1$  die Funktion



$P(t, A)$  als Wahrscheinlichkeit dafür betrachtet werden, daß das  $t$  durchlaufende System nach Ablauf der Zeiteinheit sich im Zustand  $A$  befindet. Die Eigenschaften der Iterierten von fast vollständig stetigen Operatoren involvieren dann gewisse Eigenschaften von  $P^n(t, A) = T^{n-1}[P(t, A)]$ . Sie werden mit mangelnder Zeichenklärung in zwei Sätzen angegeben und können als Verallgemeinerungen gewisser von Doebelin und Fortet 1937 erhaltenen Resultate betrachtet werden.

Szentmártony (Budapest).

**Katětov, Miroslav:** Linear operators. I. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 9—D 31 und engl. Zusammenfassg. D 31 (1950) [Tschechisch].

This is the first part (§§ 1—6) of an expository article on the theory of linear operators (in Hilbert space, mainly). Normed linear and unitary spaces, linear mappings and general properties of linear operators are considered. Headings of the paragraphs: § 1. Normed linear spaces. § 2. Unitary spaces. § 3. Complete unitary spaces. § 4. Continuous linear transformations. § 5. Linear functionals. Weak convergence. § 6. Linear operators. (Autoreferat).

**Hille, Einar:** On the differentiability of semi-group operators. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 19—24 (1950).

In einem komplexen Banachraum  $\mathfrak{X}$  sei ein abgeschlossener linearer Operator  $A$  mit in  $\mathfrak{X}$  dichtem Definitionsbereich  $\mathfrak{D}[A]$  gegeben. Es existiere für  $\lambda > 0$  eine beschränkte Resolvente  $R(\lambda; A)$  mit  $\lambda \|R(\lambda; A)\| \leq 1$ . Dann ist  $A$  die infinitesimale Erzeugende einer Halbgruppe  $T(\xi)$ ,  $\xi > 0$ , von beschränkten Operatoren in  $\mathfrak{X}$  mit den Eigenschaften  $T(\xi_1)T(\xi_2) = T(\xi_1 + \xi_2)$ ,  $\|T(\xi)\| \leq 1$  und  $\lim_{\xi \rightarrow 0} T(\xi)x = x$

für alle  $x \in \mathfrak{X}$ . Umgekehrt gehört zu einer solchen Halbgruppe eine infinitesimale Erzeugende  $A$  mit den obigen Eigenschaften. Für alle  $x \in \mathfrak{D}[A]$  läßt sich im Sinne starker Konvergenz  $T'(\xi)x = AT(\xi)x$  bilden,  $T'(\xi)$  ist im allgemeinen unbeschränkt. Es wird untersucht, was aus der Annahme, daß  $T'(\xi)$  beschränkt ist, folgt. Ist für  $\xi > 0$   $\|T'(\xi)\| = \xi G(\xi)$ , so gilt: Ist  $\delta(\tau)$  die Entfernung von  $1 + \tau i$  vom Spektrum von  $A$ , so gilt für große  $|\tau|$   $\delta(\tau) > 1/3\eta(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$  die einzige Wurzel der Gleichung  $G(\eta) = \tau$ . Umgekehrt wird aus einer Voraussetzung über genügend schnelles Anwachsen von  $\delta(\tau)$  mit  $|\tau|$  geschlossen, daß  $T(\xi)$  beschränkte Ableitungen beliebig hoher Ordnung hat.

G. Köthe (Mainz).

**Schmeidler, Werner:** Über unbeschränkt iterierbare Operatoren. J. reine angew. Math. 187, 109—114 (1949).

Soit  $K$  un opérateur linéaire défini dans un espace de Hilbert  $H$ , prenant ses valeurs dans un espace de Hilbert  $H^*$ ,  $K^*$  son opérateur adjoint;  $D \subset H$  et  $D^* \subset H^*$  les domaines de définition de  $K$  et  $K^*$ . L'A. démontre que si  $KD \subset D^*$ ,  $K^*D^* \subset D$ , et si  $D$  et  $D^*$  sont partout denses, il existe des systèmes orthonormés complets en  $H$  et  $H^*$  par rapport auxquels  $K$  est représenté par une matrice finie (abstraction faite des lignes et colonnes nulles). Cas particulier d'un opérateur autoadjoint.

Pereira Gomes (Nancy).

**Fuglede, Bent:** A commutativity theorem for normal operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 35—40 (1950).

Dans un espace hilbertien complexe  $H$ , soient  $N$  un opérateur linéaire,  $M$  l'ensemble des opérateurs bornés  $B$  (partout définis) permutables à  $N$  (i. e.  $BN \subset NB$ ). Th. 1: Si  $N$  est normal,  $M$  est self-adjoint:  $B \in M$  entraîne  $B^* \in M$ . (Pour une démonstration, postérieure, de P. R. Halmos, cf. l'analyse suivante). Réciproquement, si  $M$  est self-adjoint,  $N$  est évidemment normal si on suppose  $N$  borné; mais: Th. 2: Il existe un  $N$  fermé non normal, défini sur un ensemble dense dans  $H$ , tel que  $M$  se réduise aux opérateurs scalaires [on prend  $H = L^2(-\infty, +\infty)$ , et  $Nf(x) = xf(x) + f'(x)$ ].

Dixmier (Paris).

**Halmos, Paul R.:** Commutativity and spectral properties of normal operators. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 153—156 (1950).

Cet article donne une nouvelle démonstration, moins élémentaire, du th. 1 de

Fuglede (cf. l'analyse précédente). Le lemme essentiel est le suivant: soient  $A$  un opérateur normal,  $F(\lambda, \varepsilon)$  le sous-espace spectral des  $x$  tels que  $\|(A - \lambda)^n x\| \leq \varepsilon^n \|x\|$ , pour tout  $n = 1, 2, \dots$ ,  $F(M, \varepsilon)$  le sous-espace engendré par les  $F(\lambda, \varepsilon)$  quand  $\lambda$  parcourt l'ensemble  $M$ , et  $F(M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} F(M, \varepsilon)$ ; alors, si  $M$  est compact,

$F(M)$  n'est autre que le sous-espace spectral associé à  $M$ . Dixmier (Paris).

Atkinson, F. V.: Symmetric linear operators on a Banach space. *Mh. Math.*, Wien **53**, 278—297 (1949).

Si  $U$  est un opérateur normal d'un espace hilbertien, on a  $\|Uf\|^2 \leq \|f\| \cdot \|U^2 f\|$  pour tout  $f$ . L'auteur étend certaines propriétés des opérateurs normaux aux opérateurs  $U$  d'un espace de Banach complexe qui vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes: (A)  $\|Uf\|^2 \leq \|f\| \cdot \|U^2 f\|$  pour tout  $f$ ; (B) Tout polynôme en  $U$  a la propriété (A). Par exemple, si  $U$  vérifie (B), deux vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont „orthogonaux“, et toute singularité isolée de la résolvante est un pôle simple ( $f$  est orthogonal à  $g$  si  $\|f + \lambda g\| \geq \|f\|$  pour tout  $\lambda$ ). Un théorème spectral détaillé est donné pour les  $U$  vérifiant les conditions suivantes: a) pour tout scalaire  $\lambda \neq 0$ , l'existence d'une suite  $f_n$  telle que  $\|f_n\| = 1$ ,  $Uf_n - \lambda f_n \rightarrow 0$  entraîne l'existence d'une suite  $g_n$  telle que  $\|g_n\| = 1$ ,  $Ug_n - \lambda g_n = 0$ ,  $\|f_n - g_n\| \rightarrow 0$ ; b) l'algèbre  $R$  uniformément fermée engendrée par  $U$  est „sans radical“ au sens très fort que voici: il existe un  $\mu > 0$  tel que  $\|V^m f\| / \|f\|^{1/m} \geq \mu \|Vf\| / \|f\|$  quels que soient  $f, m$ , et  $V \in R$ . Dixmier (Paris).

Lorch, E. R.: Return to the self-adjoint transformation. *Acta Sci. math.*, Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 137—144 (1950).

L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème spectral pour les opérateurs self-adjoints  $H$ , bornés ou non, dans un espace hilbertien de dimension quelconque. Pour la commodité, le spectre ponctuel est d'abord éliminé. L'outil essentiel est ensuite l'intégrale  $\int_C (\zeta - \lambda)^m (\mu - \zeta)^n (\zeta - H)^{-1} d\zeta$ , où  $m, n$  sont des entiers  $> 0$ , où  $C$  est une courbe régulière, symétrique par rapport à l'axe réel, coupant celui-ci en  $\lambda$  et  $\mu$  sous un angle  $\neq 0$ . Dixmier (Paris).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the spectra of Toeplitz's matrices. *Amer. J. Math.* **72**, 359—366 (1950).

Ist  $f_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , eine Folge komplexer Zahlen mit  $f_n = \overline{f_{-n}}$  und  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 < \infty$ , so ist  $L = (f_{n-m}), n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , eine Laurentmatrix,  $T = (f_{n-m}), n, m = 0, 1, 2, \dots$ , eine Toeplitzmatrix und  $H = (f_{n+m+1}), n, m = 0, 1, 2, \dots$ , eine Hankelmatrix. Das Spektrum einer  $L$ -Matrix wurde von Toeplitz bestimmt mit Hilfe der zugeordneten Funktion  $f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\theta}$ . Über das Spektrum von  $T$  werden folgende Aussagen gemacht: Es ist im Spektrum der zugehörigen  $L$ -Matrix  $L$  enthalten, aber im allgemeinen nicht damit identisch, sicher jedoch dann, wenn  $f(\theta)$  in  $(0, 2\pi)$  stetig ist. Ist  $\lambda$  im Punktspektrum von  $L$ , so nicht im Punktspektrum von  $T$ , falls  $T \neq cE$ . Ist  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n z^n$  eine rationale Funktion, so hat  $T$  kein Punktspektrum.  $T$  und  $L$  sind nicht vollstetig, jedoch ist  $H$  für reelle  $f_n$  vollstetig, wenn  $g(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\theta$  oder  $h(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\theta$  stetig in  $[0, \pi]$  sind. Der Punkt 0 gehört stets zum Häufungsspektrum einer beschränkten  $H$ -Matrix. Weitergehende Vermutungen über das Spektrum von  $T$  werden aufgestellt. G. Köthe (Mainz).

Krejn, M.: Unendliche  $J$ -Matrizen und das Matrizen-Momentenproblem. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **69**, 125—128 (1949) [Russisch].

La matrice hermitienne infinie  $A = \|a_{ik}\|_{i,0}^{\infty}$  est dite une  $J_p$ -matrice régulière,



si elle peut être représentée dans la forme  $A = \|A_{ik}\|_0^\infty$ , où les  $A_{ik}$  ( $i, k = 0, 1, 2, \dots$ ) sont des matrices carrées d'ordre  $p$ ,  $A_{ik} = 0$  pour  $|i - k| > 1$  et  $A_{i,i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) n'est pas singulière. L'A. énonce quelques résultats sur l'indice de défaut de  $A$  considéré comme opérateur hermitien dans l'espace de Hilbert des suites de nombres complexes à carrés sommables. Ces résultats amènent l'A. à considérer le problème matriciel des moments  $S_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dT(\lambda)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), où

les matrices  $S_n$  d'ordre  $p$  sont liées d'une certaine manière aux matrices  $A_{i,i+1}$ , et où la fonction matricielle cherchée  $T(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ) est telle que  $xT(\lambda)x^*$  soit une fonction non-décroissante pour tout vecteur  $x$ . Horváth (Paris).

**Dowker, Yael Naim:** A new proof of the general ergodic theorem. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 162—166 (1950).

In this note the au. proves a lemma, from which Hurewicz's general ergodic theorem (concerning transformations which are not necessarily measure preserving) can be deduced in a form due to Halmos [Proc. nat. Acad. Sci. USA. 32, 156—161 (1946)]. This lemma plays the same rôle as the „maximal ergodic theorem“ in the proof of G. D. Birkhoff's ergodic theorem. The proof given here is similar to F. Riesz's proof of the maximal ergodic theorem [Comment. math. Helvetici 17, 221—239 (1945)]. Horváth (Paris).

**Floyd, E. E.:** A nonhomogeneous minimal set. Bull. Amer. math. Soc. 55, 957—960 (1949).

L'A. répond affirmativement à la question suivante: Existe-t-il un ensemble minimal, compact, de dimension 0 en certains de ses points et de dimension positive en d'autres points? A cet effet, l'A. construit l'exemple d'un ensemble plan jouissant de ces propriétés.  $E$ , étant un ensemble compact, totalement discontinu, de l'axe  $Ox$ . à chaque  $x_0 \in E$  on fait correspondre un segment parallèle à  $Oy$ , situé sur  $x = x_0$ . La réunion de ces segments donne l'ensemble  $X$  désiré. On construit ensuite une homéomorphie  $f$  de  $X$  en lui-même, telle que  $X$  soit minimal par rapport à  $f$  [il n'existe aucun  $Y \subset X$ ,  $O \neq Y \neq X$ , tel que  $f(Y) \subset Y$ ], et l'on établit que  $X$  jouit des propriétés demandées. Il en résulte qu'il existe des ensembles minima non-homogènes. De plus,  $X$  possède des points qui sont régulièrement presque périodiques, et des points qui ne le sont pas. Calugareanu (Cluj).

## Praktische Analysis:

• Luckey, P.: Nomographie. (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I. Nr. 59/60.) — 6. Aufl. Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1949. 107 S. m. 57 Abb.; kart. 4,20 DM.

Pajares, E.: Eine nomographische Lösung der Gleichung zweiten Grades. Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 7, 94—97 (1947) [Spanisch].

Bilimović (Bilimovitch), Anton D.: On a geometrical construction and apparatus for approximate solution of Keplers equation. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 117—123 und engl. Zusammenfassg. 124 (1948) [Serbisch].

There are many methods for the solution of Kepler's classical transcendental equation  $u - e \sin u = w$ , where  $u$  is the sought for eccentric anomaly,  $e$  the eccentricity of the orbit and  $w$  is the given mean anomaly. The majority of them are based on giving an algorithm, by means of which, by the first given approximate solution, a solution is found with the wanted degree of exactness. The more exact the first approximative is, the quicker can be obtained the exactness wanted. — In the present note a very simple method of determination of the first approximative by the way of graphic is proposed. Theoretically this method gives a determination with exactness of second degree of eccentricity included, while the coefficient in the third degree of this eccentricity cannot differ from its exact value by more than

$\frac{1}{3} \sin^3 w$ . — According to the principle of geometrical construction a corresponding apparatus can also be constructed. (Autoreferat).

**Schilt, Heinz:** Das Bestimmen von Linienintegralen mit Hilfe eines Integraphen. Z. angew. Math. Phys. Basel **1**, 145—147 (1950).

Zur Berechnung von Linienintegralen bestimmt Verf. mit dem Integraphen die analogen Integrale für einen Streifen, begrenzt von zwei Parallelkurven im Abstände  $a$ . Die für das statische Moment  $M$  und Trägheitsmoment auftretenden Zusatzglieder werden eliminiert durch Kombination der Resultate für zwei verschiedene  $a$ -Werte. (Die Endformel für das statische Moment enthält einen Druckfehler „cos“ an Stelle von „sin“.) *E. M. Bruins* (Amsterdam).

**Mathieu, P.:** Über das Extrapolationsverfahren von Adams zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Elemente Math., Basel **5**, 25—31 (1950).

Schilderung des bekannten Verfahrens.

*Weissinger* (Hamburg).

**Dainelli, Dino:** Sull'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. **7**, 393—405 (1948).

Zur numerischen Integration einer Differentialgleichung

$$y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}$  im Intervall  $(x_0, x_0 + a)$  leitet Verf. folgendes Verfahren her: Sei  $h = a/n$ ,

$\psi_{\lambda,0} = 1$ ,  $\psi_{\lambda,k} = \sum_{l=1}^k b_{k,l} \frac{\lambda!}{l!(\lambda + k - l + 1)!}$ , wobei die  $b_{k,l}$  sukzessive aus

$$b_{k,l} = \frac{k-l+1}{k} b_{k-1,l} + \frac{k-1}{k} b_{k-1,l-1} \quad (k > l > 1), \quad b_{k,1} = 1, \quad b_{l,l} = 1/l$$

zu berechnen sind, und seien Näherungswerte  $y_s^{(i)*}$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) für  $s = 1, 2, \dots, v$  ( $n \geq v+1$ ) bereits bekannt. Dann bestimmen sich die weiteren Näherungswerte aus den Formeln

$$y_{s+1}^{(i)*} = \sum_{j=0}^{m-i-1} y_s^{(i+j)*} \frac{h^j}{j!} + \frac{h^{m-i}}{(m-i)!} \sum_{k=0}^v \psi_{m-i,k} \Delta_k y_s^{(m)*}$$

$$y_{s+1}^{(m)*} = f(x_{s+1}, y_{s+1}^*, y'_{s+1}, \dots, y_{s+1}^{(m-1)*}).$$

Dieses Verfahren stellt eine Verallgemeinerung der Methode von Cauchy-Lipschitz dar, wobei  $v = 0$  zu setzen wäre, und hat gegenüber dem Verfahren von Adams gleicher Klasse  $v$  [wegen dieser Verfahren vgl. etwa G. Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale, Bologna 1941, parte II, cap. XI; dies. Zbl. **26**, 402] den Vorteil, daß nur ein Differenzenschema der  $m$ -ten Ableitung  $y_s^{(m)}$  gebraucht wird. Die Konvergenz des Verfahrens wird nachgewiesen und dasselbe an einem Beispiel erläutert. *M. J. de Schwarz* (Roma).

**Juškov, P. P.:** Über die Anwendung von Dreiecksnetzen zur numerischen Integration der Wärmeleitungsgleichung. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 223—226 (1948) [Russisch].

Regelmäßige Dreiecksnetze mit der Maschenweite  $h$  sind zur numerischen Integration der ersten Randwertaufgabe der ebenen Wärmeleitungsgleichung  $\partial u / \partial t = k \cdot \Delta u$  am besten geeignet, wie Verf. leicht mittels der Taylor-Entwicklung feststellt, wenn der Zeitabstand aufeinander folgender Zustandsbilder gleichbleibend  $\tau = h^2 / 8k$  genommen wird. Der Funktionswert  $u$  in einem Punkte zeigt sich dann als Mittel aus den Werten zu der um  $\tau$  früheren Zeit in den 6 Nachbarpunkten und dem Punkte selbst, wobei dieser mit dem Gewicht 6 einzusetzen ist. Der Fehler bleibt dann in der 4. Ordnung von  $h$ , erreicht bei anderer Wahl von  $\tau$  die 2. Ordnung. Für die Behandlung der Randwerte, wenn der Rand des Gebietes nicht aus Netzstrecken besteht, wird auf die Untersuchungen von Ch. E. Mikeladze verwiesen [dies. Zbl. **10**, 399; **24**, 269]. — Anmerkung des Ref.: Die Ergebnisse sind im wesent-



lichen schon bekannt; vgl. G. Schulz, Formelsammlung zur prakt. Math. (Berlin 1945), S. 134. Bödewadt (Brunoy).

**Hurwitz jr., H.:** Note on the variational method for finding extrapolated endpoints. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 867—868 (1949).

Verf. gibt eine Abschätzung für den „extrapolierten Endpunkt  $x_0$ “ der asymptotischen Lösung  $f(x) = a(x + x_0)$  der Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x') G(|x - x'|) dx'; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(|x|) = 1$$

nach

$$x_0 \geq |x|_m^3/6 |x|_m^2 + |x|_m^2/4 |x|_m,$$

wobei  $|x|_m^v = \int_{-\infty}^{+\infty} G(|x|) |x|^v dx$  ist, und zeigt die gute Übereinstimmung an drei streng berechneten Beispielen. W. Glaser (Wien).

**Athen, H.:** Genauigkeitssteigerung beim Beilschneidenplanimeter. Z. angew. Math. Mech. 29, 375—377 (1949).

Zur Vergrößerung der Genauigkeit der mittels des Beilschneidenplanimeters (Fahrarm  $l$ ) vollzogenen Bestimmung der Fläche  $F$  einer Kurve, für deren Gleichung in Polarkoordinaten  $g(r, \vartheta) = 0$  die Reihenentwicklung gilt

$$l^2 \bar{\alpha} = l \bar{\beta} = F + (1/4l^2) \int R^2 dF + \dots + \int G(R, l) \cos \varphi dF$$

( $R = r l$ ,  $\varphi$  = Winkel zwischen Anfangs- und Endlage der Fahrarmrichtung), wird bekanntlich das letzte Glied eliminiert durch Mittelbildung über zwei Umfahrungen mit um  $180^\circ$  verschieden gewählten Anfangslagen. Außerdem läßt sich unter Benutzung zweier verschiedener Fahrarmlängen und Beschränkung auf die ersten zwei Glieder das Integral eliminieren, und man erhält  $F = (l_1^2 F_1 - l_2^2 F_2) : (l_1^2 - l_2^2)$ .

Verf. ersetzt im Integral  $F^* - l^2 \bar{\alpha} = \int f(R^2/l^2) dF = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int f(R^2/l^2) R^2 d\vartheta$  das  $R$

durch einen konstanten Mittelwert  $R_m$ . Für den Kreis läßt sich  $\bar{\alpha} = \varphi(\alpha_m)$  leicht berechnen. Verf. berechnet nun aus dem erhaltenen  $\alpha$  mittels dieser Funktion  $\alpha_m$  und setzt  $F = l^2 \alpha_m$ . Dieser Wert wird verbessert durch Benutzung von zwei Fahrarmlängen  $l_1, l_2$ . Verf. bemerkt, daß eine Neigung  $\varepsilon$  der Schneide gegen die Fahrarmrichtung eine scheinbare Verkürzung von  $l$  auf  $l \cos \varepsilon$  liefert. Bruins.

**Ragazzini, John R. and Lotfi A. Zadeh:** Probability criterion for the design of servomechanisms. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 141—144 (1949).

Das 1947 von H. M. James, N. B. Nichols und R. S. Phillips im Rahmen der bekannten Radiation Laboratory Series des Massachusetts Institute of Technology herausgegebene Buch „Theory of Servomechanisms“ mit seinen inzwischen zur Norm gewordenen Bezeichnungen und Definitionen versteht unter einem Servomechanismus eine Kombination zum Steuern einer Energiequelle, so daß der Ausgang der Kombination oder eine Funktion davon ( $\theta_o$ ) zum Vergleich mit dem Eingang ( $\theta_i$ ) zurückgekoppelt ist und die Differenz zwischen den beiden Größen ( $\varepsilon = \theta_i - \theta_o$ ) die Energiequelle steuert. Die Differenz  $\varepsilon$  wird als der Fehler des Servomechanismus bezeichnet. (Zweckmäßiger wäre es,  $-\varepsilon$  als Fehler und  $\varepsilon$  als Korrektur zu bezeichnen.) — Im allgemeinen läßt sich für viele Servomechanismen eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung  $\mathfrak{L}(\varepsilon) = \mathfrak{L}(\theta_i)$  aufstellen, wobei  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{L}$  lineare Differentialoperatoren sind. Von einem Servomechanismus verlangt man „Stabilität“, d. h. für  $\theta_i = 0$  soll  $\varepsilon$  auf Null abklingen. Man verwendet Servomechanismen zur Fernübertragung von Bewegungen und allgemeiner zum automatischen Kompensieren von gemessenen oder davon abgeleiteten Größen. Auch Regelschaltungen lassen sich als Servomechanismen auffassen. — Ist  $\theta_i$  ein Meßwert, so kann man  $\theta_i = \theta_s + \theta_N$  als Ausdruck dafür schreiben, daß der Meßwert

aus dem Meßsollwert  $\theta_s$  und dem Meßfehler  $\theta_N$  zusammengesetzt ist. Über den Meßfehler  $\theta_N$  werden sehr oft statistische Annahmen, wie z. B. die einer Normalverteilung, gemacht, und man verlangt dann vom Servomechanismus, daß er einen solchen Meßfehler nach Möglichkeit ignoriert, also wie ein Filter wirkt. Überlegungen dieser Art finden sich bei A. Kharkevitch, N. Wiener und N. Levinson; in dem oben erwähnten Buche kommt auch diese statistische Betrachtungsweise zu Wort. Die Aufspaltung von  $\theta_i$  führt zu einer entsprechenden Aufspaltung  $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_N$  für den Fehler. Bei gegebenem  $\theta_s$  verlangt man, daß der zeitliche Mittelwert von  $\varepsilon^2$  möglichst klein ausfalle. Man entwirft und dimensioniert Servomechanismen so, daß jener Mittelwert zum Minimum gemacht wird. — Dies vorausgeschickt, schlagen die Verf. ein neues Kriterium für die Güte von Servomechanismen vor. Bedeutet  $L$  eine gegebene Toleranz, so verlangen sie, daß die Wahrscheinlichkeit  $|\varepsilon| \leq L$  als Gütemaß für bestimmte Klassen von Servomechanismen genommen werde. Das ist vom technischen Gesichtspunkt einwandfrei. Nicht so unbedenklich sind die dazu ausgeführten Rechnungen, die sich auf eine Klasse von durch gewisse Parameter  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gekennzeichneten Servomechanismen beziehen und die Berechnung des Maximums jener Wahrscheinlichkeit mit Bezug auf  $\alpha_i$  zum Gegenstand haben. Die Rechnungen sind teils zu kurz, um verständlich zu sein, teils zu widerspruchsvoll, um die Resultate glaubwürdig zu machen.

*Hans Bückner (Minden).*

**Benner, Arthur H.:** Phase lead for A. C. servo mechanisms. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 268—273 (1949).

Bei den im vorsteh. Referat beschriebenen Servomechanismen schließt die Steuerung der Energiequelle durch den Fehler  $\varepsilon = \theta_i - \theta_0$  die Möglichkeiten mit ein, daß die Änderungsgeschwindigkeit von  $\varepsilon$  oder etwa das Zeitintegral von  $\varepsilon$  zur Steuerung herangezogen werden. Die Änderungsgeschwindigkeit wird dabei im gleichen Sinne wie  $\varepsilon$  selbst „aufgeschaltet“, so daß die Linearkombination der beiden Größen einem zukünftigen Wert von  $\varepsilon$  entspricht. Bei vielen Servomechanismen wird daher nicht erst die Änderungsgeschwindigkeit ermittelt, sondern direkt ein zukünftiger Wert von  $\varepsilon$  berechnet. Man benutzt, wenn  $\varepsilon$  als elektrische Spannung auftritt, einen Vierpol, dessen Ausgang dem Eingang in der Phase voreilt (phase advance). — Bei der Steuerung von Wechselstromservomotoren moduliert man mit dem Fehler  $\varepsilon$  eine Wechselspannung konstanter Frequenz, verstärkt sie und gibt sie auf den Motor. In diesem Falle sucht man eine hinreichend große Phasenvor-eilung mit Bezug auf die einmodulierte Spannung. Das Problem, einen wirksamen Vierpol zu finden, wird aber komplizierter, weil der Vierpol wesentlich auf die Trägerfrequenz antwortet. — Verf. untersucht nun einige einfache Vierpole auf ihre Eignung für Wechselstrommechanismen. Die Rechnungen sind elementar. Die Resultate lassen sich nicht auf eine einfache Formel bringen. Sie sollten von denen, die es angeht, direkt nachgelesen werden.

*Hans Bückner (Minden).*

● **Versluys, J. und P. Wijdenes:** Tafel H. I: Gewöhnliche Logarithmen, II: Logarithmen der goniometrischen Funktionen, III: Goniometrische Funktionen mit Interpolationstafeln, IV: Beita-feln. — 4. Aufl. Groningen: P. Noordhoff N. V. 1948. 170 S.; f. 6,25 [Holländisch].

## Geometrie.

### Elementargeometrie:

● **Delachet, André:** La géométrie contemporaine. („Que sais-je?“ Le point des connaissances actuelles Nr. 401.) Paris: Presses Universitaires de France 1950. 128 p.

Ouvrage d'initiation aux développements modernes de la Géométrie. „C'est à l'honnête homme du XXe siècle qui a su apprécier cette beauté (des mathématiques),

mais que ses occupations ont éloigné du Temple mathématique que nous voulons dédier cet ouvrage“. L'ouvrage commence par un aperçu historique sur le développement de la Géométrie aux XIXe et XXe siècles, où les noms des plus grands géomètres (sauf Darboux) sont indiqués, avec leurs principales contributions. Quelques pages sur les groupes abstraits, énumération des groupes de la Géométrie élémentaire, groupes de transformations, programme d'Erlangen. Des résultats attrayants de Géométrie algébrique, anciens et nouveaux, sont présentés, puis, en passant par les espaces vectoriels, les espaces métriques en général, nous arrivons à la Topologie, qui est l'objet de la troisième partie, s'étendant sur la moitié du livre. Après un aperçu historique, l'objet de la Topologie est présenté à l'aide d'exemples saisissants, courbe de Peano, noeuds, continu frontière commune à trois domaines plans. La Topologie combinatoire est représentée par le problème des cartes, les surfaces fermées de l'espace tridimensionnel (caractéristique, orientabilité). Pour finir, quelques pages sur la Géométrie finie et la Géométrie infinitésimale directe. L'exposition est agréable, claire et intuitive, sans prétendre à être complète; elle exige du lecteur une certaine pratique des mathématiques supérieures.

*Calugareanu (Cluj).*

**Crenna, Mario:** Estensione del teorema di Pitagora. Boll. Un. mat. Ital. III. S. 4, 412—416 (1949).

Verf. beweist analytisch folgenden Satz: Für jedes beliebige Dreieck gibt es eine Potenz der größten Seite, die gleich der Summe der Potenzen mit demselben Exponenten der beiden anderen Seiten ist, und zwar liegt der Exponent für die stumpfwinkligen Dreiecke zwischen 1 und 2 und für die spitzwinkligen zwischen 2 und  $+\infty$ . Eine Potenz der kleinsten Seite eines beliebigen Dreiecks mit einem Exponenten zwischen  $-\infty$  und 0 ist gleich der Summe der Potenzen mit demselben Exponenten der beiden anderen Seiten. Der pythagoreische Satz bildet den Grenzfall zwischen den Fällen der stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreiecke, für den der Exponent gleich 2 ist.

*Zacharias (Quedlinburg).*

**Zacharias, Max:** Bemerkungen zu der Arbeit von O. Nehring „Über ein Dreiecksproblem“. J. reine angew. Math. 187, 129—130 (1950).

O. Nehring [J. reine angew. Math. 186, 70—77 (1945)] hat mittels kartesischer Koordinaten einige größtenteils bekannte Sätze über die Figur der drei Apollonischen Kreise eines Dreiecks bewiesen und Eigenschaften derjenigen Abbildung ermittelt, welche jedem Punkt der Dreiecksebene den Schwerpunkt seines Fußpunktdreiecks ( $F\text{-}\triangle$ ) zuordnet. Verf. bemängelt an dem Verfahren, daß „die einfachen geometrischen Zusammenhänge nicht ohne weiteres anschaulich erkennen läßt“ und gibt als Beispiel einen kurzen geometrischen Beweis des bekannten Satzes, daß die Punkte der Apollonischen Kreise und nur diese gleichschenklige  $F\text{-}\triangle$ e liefern (Satz 1 bei Nehring). Ebenso beweist er: Ist  $M$  der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks und  $P$  ein beliebiger Punkt seiner Ebene, so haben die Punkte der Geraden  $PM$  und nur diese die Eigenschaft, daß ihre  $F\text{-}\triangle$ e zum  $F\text{-}\triangle$  von  $P$  ortholog sind (wovon der von Nehring ohne Beweis mitgeteilte Satz 21 ein Spezialfall ist). — Wenn Verf. einzig für den Satz 20, welcher die  $F\text{-}\triangle$ e extremen Flächeninhalts betrifft, die analytische Behandlung für angemessen erachtet, so wäre darauf hinzuweisen, daß dieser Satz eine unmittelbare Folge eines Satzes von Querret und Sturm ist, nach welchem dieser Flächeninhalt proportional zur Potenz von  $P$  bezüglich des Umkreises ist. Auch das, was Nehring über jene Abbildung beweist, kann ohne jegliche Rechnung gewonnen werden. Durchläuft nämlich  $P$  eine gerade Punktreihe, so durchläuft jeder seiner drei Lotfußpunkte eine dazu ähnliche, und dasselbe tut daher auch deren Schwerpunkt. Folglich ist die Abbildung affin. Unter Heranziehung der bekannten Tatsache, daß der Lemoinesche Punkt Fixpunkt derselben ist, ergibt sich daraus alles Übrige. *Schönhardt.*

**Goormaghtigh, R.:** On pairs of triangles. Amer. math. Monthly 57, 150—153 (1950).

Die Punkte  $A$  und  $B$  der Umkreise der Dreiecke  $A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2B_3$ , deren Wallacegeraden bezüglich dieser Dreiecke irgendeiner gegebenen Richtung parallel sind, haben die Eigenschaft, daß ihre Umkreismittelpunkte  $O_aA$  und  $O_bB$  einen konstanten Winkel  $\vartheta$  bilden, den „assozierten Winkel“ der beiden Dreiecke. Zieht man durch irgendeinen Punkt Parallelen zu  $O_aA$  und  $O_bB$ , die diesen Strecken gleich



sind, so heißt die Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte  $l$  die „assozierte Strecke“, und es ist

$$l^2 = R_a^2 + R_b^2 - 2 R_a R_b \cos \vartheta.$$

Die Orthopole der Seiten jedes der beiden Dreiecke bezüglich des andern liegen auf einer bestimmten Ellipse, deren Form und Lage näher bestimmt wird. In besonderen Fällen wird die Ellipse zu einem Kreis. Weitere Sonderfälle werden untersucht. Zum Schluß wird ein mit den Orthopolen der Seiten jedes der beiden Dreiecke bezüglich des andern in Beziehung stehender Satz über die Dreiecksinhalte abgeleitet.

*Zacharias (Quedlinburg).*

**Orts, José-Maria:** Über das Sehnenfünfeck. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 8, 10—12 (1948) [Spanisch].

**Kuiper, N. H.:** Ein Schließungssatz. *Simon Stevin, wis. natuurr. Tijdschr.* 27, 6—15 (1950) [Holländisch].

In der Ebene seien  $n$  Punkte gegeben mittels ihrer Ortsvektoren  $v_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Die Ebene wird nacheinander um diese Punkte um einen festen Winkel gedreht; der Drehungsoperator wird mit  $\varrho$  bezeichnet. Aus einem Punkt  $x_1$  entsteht nach  $k$  Schritten der Punkt  $x_{k+1} = (1 - \varrho)(v_k + \varrho v_{k-1} + \dots + \varrho^{k-1} v_1) + \varrho^k x_1$ . Dabei bedeutet 1 den Einheitsoperator, während  $1 - \varrho$  im Sinne der Vektoraddition zu verstehen ist. Die entstandene Punktreihe  $x_1, \dots, x_{n+1}$  schließt sich, wenn  $x_{n+1} = x_1$ . Die Bedingung dafür lautet  $(1 - \varrho^n)x_1 = (1 - \varrho)(v_n + \varrho v_{n-1} + \dots + \varrho^{n-1} v_1)$ . Im Falle  $\varrho^n \neq 1$  wird diese Bedingung nur von einem einzigen Punkt erfüllt. Ist aber  $\varrho^n = 1$ , dann schließt die Reihe sich, wenn außerdem  $v_n + \varrho v_{n-1} + \dots + \varrho^{n-1} v_1 = 0$ . Dann kann man den Anfangspunkt  $x_1$  willkürlich wählen. In diesem Falle läßt sich das Vieleck  $v_1, \dots, v_n$  in folgender Weise aus einem Vieleck  $x_1, \dots, x_n$  konstruieren: Man errichte auf jeder Seite  $x_k x_{k+1}$  ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitelwinkel gleich dem fest angenommenen Drehungswinkel ist. Die Scheitel bilden das gesuchte Vieleck  $v_1, \dots, v_n$ . Verf. gibt Anwendungen dieser allgemeinen Ergebnisse auf einige bekannte elementargeometrische Sätze und weist auf eine mögliche Verallgemeinerung hin.

*J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

**Thébault, Victor:** Sphères remarquables associées à un tétraèdre. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I* 63, 130—136 (1949).

Wenn die Parallelen durch einen Punkt  $P$  zu drei von einer Ecke ausgehenden Kanten eines Tetraeders  $T$  die Ebenen der Tetraederflächen in 6 Punkten einer Kugel  $\Omega$  schneiden, so beschreibt der Punkt  $P$  die Verbindungsgerade jener Ecke mit den Schwerpunkten der antiparallelen Schnitte des zu der Ecke gehörigen Trieders, und umgekehrt. Durchläuft  $P$  diese Gerade, so durchläuft der Mittelpunkt von  $\Omega$  eine Gerade  $A$  durch den Umkugelmittelpunkt, und  $\Omega$  umhüllt eine Drehquadrik  $Q$ .  $\Omega$  berührt  $Q$  in einem Kreis, dessen Ebene auf  $A$  senkrecht steht. — Es gibt i. a. acht Punkte, durch die man Parallelen zu vier Kanten des Tetraeders derart legen kann, daß die acht Schnittpunkte mit den die entsprechende Kante nicht enthaltenden Ebenen in einer Kugelfläche liegen. — Sollen die Parallelen durch einen Punkt  $P$  zu fünf Kanten des Tetraeders die Ebenen der Tetraederflächen in zehn Punkten einer Kugelfläche schneiden, so müssen die Produkte von zwei Paaren von Gegenkanten einander gleich sein. Nur in einem solchen besonderen Tetraeder gibt es genau einen derartigen Punkt  $P$ . — Sind alle drei Produkte der Gegenkantenpaare einander gleich, d. h. ist das Tetraeder isodynamisch, so schneiden die Parallelen zu den sechs Kanten durch den zweiten Lemoineschen Punkt  $L$  die Tetraederebenen in zwölf Punkten der ersten Lemoineschen Kugel des isodynamischen Tetraeders (nach der Neubergschen Definition dieser Kugel. Verf. hat eine andere, in jedem Tetraeder existierende Kugel als erste Lemoinesche Kugel definiert).

*Zacharias (Quedlinburg).*

**Gambier, B.:** Sur les tétraèdres dont certains bihauteurs se rencontrent. *Bull. Soc. math. France* 77, 139—140 (1949).

In dem Tetraeder  $ABCD$  sollen sich die gemeinsamen Lote der Gegenseitenpaare  $AB$ ,  $CD$  und  $BC$ ,  $AD$  in einem Punkt schneiden. Diese Bedingung ist, wie Verf. beweist, gleichwertig mit folgenden drei Behauptungen: 1. Die Summe der Inhalte der Gegenflächen von  $A$  und  $C$  ist gleich der Summe der Inhalte der Gegenflächen von  $B$  und  $D$ . 2. Das Produkt der Gegenflächen von  $A$  und  $C$  mit dem Kosinus ihres Winkels ist gleich dem entsprechenden Produkt bezüglich  $B$  und  $D$ . 3. Der erste Lemoinesche Punkt des Tetraeders  $ABCD$  liegt in der Ebene der Verbindungsgeraden der Mitten von  $AB$ ,  $CD$  und von  $BC$ ,  $AD$ . — Verf. verdankt das Ergebnis einer Mitteilung von General Marmion. Zacharias.

● Steiner, Jacob: *Geometrical constructions with a ruler, given a fixed circle with its center*. Translated from the first German edition (1833) by Marion Elizabeth Stark. Edited with an Introduction and Notes by Raymond Clare Archibald (The Scripta Mathematica Studies Nr. 4). New York: Published by Scripta Mathematica, Yeshiva University 1950. 55 p. \$ 2.00.

Eine englische Übersetzung des berühmten Werkes „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung von Jacob Steiner [Gesammelte Werke I (1881); Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 60 (1913)]. Die Übersetzung ist herausgegeben mit historischen Anmerkungen und Noten. Man kann es nur begrüßen, daß diese Perlen der Elementargeometrie dem angelsächsischen Leserkreis zugänglich gemacht sind. Die typographische Ausstattung ist vorzüglich. Leider geben die Figuren kein Bild des Fortschritts der Zeichenkunst in den USA. J. C. H. Gerretsen (Groningen).

Tenca, Luigi: *Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 288—298 (1949).

L'autore espone, in forma riassuntiva, il metodo di risoluzione dei problemi geometrici per mezzo del ripiegamento del foglio di carta, ed elenca le costruzioni di piegatura che servono rispettivamente per la risoluzione dei problemi di primo, secondo, terzo e quarto grado, ricordando che, secondo M. Piazzolla Beloch [Scritti mat. Luigi Berzolari 93—95 (1936); questo Zbl 16, 38] tutti i problemi di terzo e quarto grado sono risolvibili col detto metodo. — L'autore mette in rilievo il fatto che il metodo ha un effettivo valore pratico e in molti casi i risultati con esso ottenuti sono più rapidi ed eleganti che operando coi mezzi consueti. M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

García Jaén, José Luis: *Reelle und imaginäre, orthogonale, diametrale und diametral geschnittene Kreise oder Kugeln. Graphische und numerische Anwendungen*. Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 7, 132—136 und 164—170 (1947) [Spanisch].

Linés Escardó, E.: *Einige Probleme der Konstruktion von Kegelschnitten, die durch Herausgehen aus der Ebene gelöst werden*. Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 7, 171—177 (1947) [Spanisch].

Sydler, J.-P.: *Construction à l'aide de la règle et de l'équerre du diamètre d'un arc de cercle en un point d'une conique*. Elemente Math., Basel 5, 49—50 (1950).

Varoli, Giuseppe: *Una proposizione di G. A. Kinner ed il problema della trisezione dell'angolo*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 78—81 (1950).

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Boggio, Tommaso: *Il calcolo geometrico di Peano*. Rend. Sem. mat., Torino 8, 71—92 (1949).

In diesem Vortrag hat Verf. sich das Ziel gesetzt, die Aufmerksamkeit der Studierenden der Mathematik auf eines der vielen Systeme geometrischer Analysis zu lenken, wovon wohl die Graßmannsche Ausdehnungslehre das klassische Beispiel ist. Diese Ausdehnungslehre ist aber sehr abstrakt und verleugnet ziemlich ihre

geometrische Herkunft. Das hat Peano veranlaßt, ein mehr anschauliches Rechnungssystem zu entwickeln, womit man in ganz hübscher Weise manche geometrische Tatsachen herleiten kann. Der Grundgedanke ist der folgende. In der Ebene bedeutet  $ABC$  das mit einem Vorzeichen versehene Flächenmaß des Dreiecks  $ABC$ . Bei fest gegebenen Punkten  $A, B$  bedeutet  $ABP = 0$ , daß  $A, B$  und  $P$  kollinear sind. In der Weise läßt sich nun ein Kalkül aufbauen, der leicht auf den Raum erweitert werden kann. Verf. gibt einige instruktive elementare Beispiele, die die Brauchbarkeit des Kalküls ins Licht setzen. *J. C. H. Gerretsen* (Groningen).

**Baravalle, H. V.: Transformation of curves by inversion.** Scripta math., New York 14, 113—125 (1948).

Anwendung der bekannten Grundeigenschaften der Inversion am Kreis auf die Darstellung inverser Figuren von Polygonen und Kegelschnitten. Vgl. auch nachsteh. Ref. *H. Horninger* (Istanbul).

**Baravalle, Herman V.: Transformation of curves by inversion.** Scripta math., New York 14, 266—272 (1948).

Fortsetzung eines früheren Aufsatzes (siehe vorsteh. Ref.): Inversion von Kegelschnitten und Zusammenhänge mit der üblichen Bildkonstruktion bei konvexen und konkaven Spiegeln. *H. Horninger* (Istanbul).

**Sz. Nagy, Gyula: Apollonische Kurven.** Publ. math., Debrecen 1, 73—88 (1949).

Eine ebene Kurve  $C_n(A, B; T)$ , deren Punkte  $P$  der Bedingung genügen:

$$A_1 \overline{P} \cdot A_2 \overline{P} \cdots A_n \overline{P} : \overline{B_1 P} \cdot \overline{B_2 P} \cdots \overline{B_n P} = T,$$

wo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zwei feste Punktgruppen („konjugierte Polgruppen“) bedeuten, heißt nach Verf. eine „Apollonische Kurve  $n$ -ten Grades mit dem Parameter  $T$ “. Offenbar sind  $C_n(A, B; T)$  und  $C_n(B, A; T^{-1})$  identisch.  $n = 1$  liefert die Apollonischen Kreise. In der komplexen  $z$ -Ebene ist  $C_n(A, B; T)$  durch eine Gleichung  $|f(z)g(z)| = T$ , bzw.  $f(z)f(\bar{z}) - T^2 g(z)g(\bar{z}) = 0$  definiert, wo  $f(z)$  und  $g(z)$  Polynome  $n$ -ten Grades sind.  $C_n$  ist eine  $n$ -fach zirkuläre algebraische Kurve der Ordnung  $2n$  und wird daher von jeder Geraden und jedem Kreis in höchstens  $2n$  reellen Punkten getroffen. Diese Kurven sind Verallgemeinerungen der vom Verf. in zwei Arbeiten (dies. Zbl. 31, 69; 34, 384) behandelten Lemniskaten und können mit denselben Methoden untersucht werden. Bei der konformen Abbildung  $w = f(z)g(z)$  entspricht der Apollonischen Kurve  $|f(z)g(z)| = T$  der „Kreis“  $|w| = T$  der  $w$ -Ebene; irgendeinem Wert  $w$  entspricht eine „Polgruppe“ in der  $z$ -Ebene, insbesondere den Punkten des Kreises  $|w| = T$  die „Hauptgruppen“ auf der Apollonischen Kurve, zwei bezüglich dieses Kreises gespiegelten Punkten entsprechen „konjugierte Polgruppen“. Der Satz von den Peripheriewinkeln kann in geeigneter Weise auf die Apollonischen Kurven übertragen werden. Ist  $T_1 < T_2 < T_3$ , so trennt  $C_n(A, B; T_2)$  die „kopolaren“ Kurven  $C_n(A, B; T_1)$  und  $C_n(A, B; T_3)$ ; insbesondere wird jedes Paar konjugierter Polgruppen getrennt. Aus der Fülle weiterer Ergebnisse sei noch hervorgehoben, daß eine  $C_n(A, B; T)$  durch ein „kopolares Kreissystem“  $|(z - a_h)(z - b_h)| = t_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ;  $t_1 t_2 \cdots t_n = T$ ) überdeckt wird, woraus Schlüsse über Lage und Gestalt dieser Kurven gezogen werden können. Verf. gibt auch eine einfache Konstruktion der Tangenten und Normalen an. *Gröbner* (Innsbruck).

**Coxeter, H. S. M.: Projective geometry.** Math. Mag., Texas 23, 79—97 (1949).

Die wichtigsten Axiome und Grundbegriffe der ebenen projektiven Geometrie (Dualität, Doppelverhältnis, Perspektivität, Projektivität usw.) werden aufgezählt und durch definierende Sätze beschrieben. Kollineation und Korrelation, Polarität und einige Kegelschnittseigenschaften (Sätze von Pascal und Brianchon u. a.) werden auf je etwa einer Seite erwähnt! Synthetische Methode, Beschränkung auf reelle Elemente (imaginäre werden nur an einer Stelle genannt). *H. Horninger*.



**Balaña, Pedro:** Bemerkung über die Ableitung des Satzes von Steiner aus der Polarität. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 8, 201—202 (1948) [Spanisch].

**Orate, Jose:** Das vollständige Vierseit. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 7, 98—100 (1947) [Spanisch].

**Hacar, Miguel Angel:** Ableitung von Eigenschaften der Kegelschnitte durch Betrachtung von polar-reziproken Figuren. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 8, 233—239 (1948) [Spanisch].

**Rosenbaum, R. A. and Joseph Rosenbaum:** Some consequences of a well known theorem on conics. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 933—935 (1949).

Einige Sätze über Systeme von Kegelschnitten mit zwei gemeinsamen Punkten. U. a. wird die allgemeinste Form des Theorems von Desargues („Jedes Kegelschnittbüschel schneidet einen durch zwei seiner Grundpunkte laufenden Kegelschnitt in Punktpaaren einer Involution“) aus der Existenz eines „Chordalpunktes“ dreier solcher Kegelschnitte abgeleitet.

*H. Horninger* (Istanbul).

**Mandzjuk, Anastasia:** Über die Konstruktion von Geradensystemen im  $n$ -dimensionalen Raume. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 61, 609—611 (1948) [Russisch].

Verf. verallgemeinert den tetraedralen Komplex des  $P_3$  zum System aller Geraden des  $P_n$ , die  $k+1$  gegebene Hyperebenen desselben schneiden. Das genaue Analogon ergibt sich im Falle  $k=n$ . Die Geradensysteme werden durch Projektion aus dem  $S_{n+1}$  gewonnen; nach Ansicht des Ref. würde hier eine Projektion aus der Segremannigfaltigkeit des  $P_{2n+1}$ , die auch den gewöhnlichen tetraedralen Komplex stark aufhellt, noch besser sein.

*Burau* (Hamburg).

**Charrueau, André:** Sur les faisceaux de complexes linéaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 359—360 (1949).

**Charrueau, André:** Sur les faisceaux de complexes linéaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 803—805 (1949).

**Charrueau, André:** Sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 894—896 (1949).

I. Fortsetzung einer Untersuchung über Büschel linearer Strahlenkomplexe (dies. Zbl. 34, 244). Hier findet man: erstens weitere Eigenschaften über die zwei Geraden  $D'$ ,  $D''$ , die zu einer Geraden  $D$  in bezug auf zwei Komplexe des Büschels  $\Phi$  polar sind (die Geraden  $D'$ ,  $D''$  sind polar in bezug auf einen anderen Komplex des Büschels); zweitens einige Bemerkungen über die Strahlenkomplexe, die in bezug auf einen Komplex von  $\Phi$  den Komplexen von  $\Phi$  selbst entsprechen (solche Komplexe gehören dem Büschel  $\Phi$  an). — II. Wenn das Büschel  $\Phi$  die Gleichung  $C_1 + \lambda C_2 = 0$  hat und  $C_1$  und  $C_2$  zwei seiner Komplexe sind, stellt Verf. die Gleichung desjenigen Komplexes  $C_3$  des Büschels auf, der polar zu  $C_1$  in bezug auf  $C_2$  ist. Dann betrachtet er im reellen Gebiete eine Reihe  $C_j$  von Komplexen des Büschels, so daß immer  $C_{j+2}$  polar zu  $C_j$  in bezug auf  $C_{j+1}$  ist. Insbesondere kann die Reihe geschlossen sein. Wenn  $\mu_j, \lambda_1, \lambda_2$  die Parameterwerte der Komplexe  $C_j$  und der zwei singulären Komplexe des Büschels bedeuten und wenn  $\alpha_j = \frac{\mu_j - \lambda_1}{\mu_j - \lambda_2}$  ist, so erhält man eine geschlossene Reihe der obengenannten Art, wenn die  $\alpha_j$  eine geometrische Reihe bilden. Als besonderes Beispiel der Fall, wo das Büschel durch Rotation eines Strahlenkomplexes um eine zu seiner Achse senkrechte Gerade entsteht. — III. Hier geht Verf. vom komplexen Standpunkte aus. Man erhält eine geschlossene Reihe der obengenannten Art, indem man  $2\mu_j = \lambda_1 + \lambda_2 - i(\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \theta_j$  setzt, wo die  $\theta_j$  eine arithmetische Reihe bilden. Schließlich noch einige besondere Bemerkungen im Falle, wo  $(\lambda_1 \mu_{j+1} \mu_j \mu_{j+2}) = -1$  für ein beliebiges  $j$  ist. *Togliatti*.

**Bishara, S. and A. Y. Amin:** The configuration of Schur quadrics and the parabolic curve of the trinodal cubic surface. *Amer. J. Math.* 70, 414—422 (1948).

Man weiß, daß die Geraden von zwei Sextupeln auf einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung  $F$ , die zusammen eine Doppelsechse bilden, zueinander polar in bezug

auf eine Quadrik sind; man erhält so die 36 sogenannten Quadriken von Schur einer Fläche 3. Ordnung. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist die Untersuchung der Konfiguration solcher Quadriken im Falle, wo die Fläche  $F$  drei Doppelpunkte  $A, B, C$  hat. Die 27 Geraden reduzieren sich auf nur 12; die 36 Doppelsechsen auf nur 14; und die Quadriken von Schur auf nur 11, da drei Paare von Doppelsechsen zu derselben Quadrik führen. Verf. wählt als Fundamentalpunkte der Koordinaten die drei Doppelpunkte  $A, B, C$  und den Schnittpunkt  $D$  der drei Ebenen, die  $F$  längs  $AB, BC, CA$  berühren; er stellt dann die Gleichungen aller 11 Quadriken von Schur auf, eine von ihnen ist die Doppelebene  $ABC$ ; drei andere sind Ebenenpaare; 6 andere sind Kegel mit Spitzen in  $A, B, C$  (zwei Kegel mit Spitze in  $A$  usw.); eine einzige ist eine eigentliche Quadrik  $G$ . Es werden die Beziehungen dieser Quadriken zueinander und zu den Punkten  $A, B, C$  untersucht. Die Fläche  $F$  bildet mit den drei Ebenen  $DAB, DBC, DCA$  ein Büschel von Flächen 3. Ordnung; Ort der parabolischen Linien aller dieser Flächen ist eine Fläche 4. Ordnung, die in die zweimal gezählte Ebene  $ABC$  und in eine Quadrik  $P$  zerfällt; Verf. findet verschiedene Beziehungen zwischen  $P$  und den Quadriken von Schur und den 12 Geraden der Fläche  $F$ .

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Jense, Josef:** Bestimmung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch sieben Paare entsprechender Punkte. *Math. Z.*, Berlin **52**, 605—610 (1950).

Die Eigenschaft einer ebenen quadratischen Verwandtschaft, durch 7 Paare entsprechender Punkte allgemeiner Lage bestimmt zu werden, ist eine unmittelbare Folge der anderen Eigenschaft jeder solchen Verwandtschaft, als „Schnitt“ von zwei ebenen Korrelationen konstruiert werden zu können. Für diese zweite Eigenschaft wird hier ein geometrisch-analytischer Beweis gegeben, und daraus auch die erste Eigenschaft gefolgert.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**García Pérez, J.:** Analytische Darstellung der Ähnlichkeit. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **8**, 154—156 (1948) [Spanisch].

**García García, José:** Einige Überlegungen über ebene quadratische Transformationen. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 208—212 (1947) [Spanisch].

## Algebraische Geometrie:

**Kufré, Griselda Pascual:** Über die beiden ersten Plücker'schen Formeln. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **8**, 81—82 (1948) [Spanisch].

**Sz.-Nagy, Gyula:** Ein anschaulicher Beweis der ersten Plücker'schen Formel. *Publ. math.*, Debrecen **1**, 71—72 (1949).

Verf. gibt einen Beweis der 1. Plücker'schen Formel  $m = n(n-1) - 2d - 3k$  ( $n$  = Ordnung,  $m$  = Klasse,  $d$  und  $k$  = Anzahl der Doppelpunkte und Spitzen einer irreduziblen ebenen algebraischen Kurve), der auf einer der Steinerschen Symmetrisierung ähnlichen Überlegung beruht.

*Gröbner (Innsbruck).*

**Meyler, Dorothy S.:** A point representation of a system of rational normal curves of order  $n$  through  $n+1$  fixed points. *Quart. J. Math. (Oxford II. S.)* **1**, 33—40 (1950).

Verf. betrachtet die Gesamtheit der rationalen Normkurven  $C^n$ , die durch die  $n$  Punkte  $A_0, A_1, \dots, A_n$  gehen und deren Sehnen einem System von  $\infty^n$  Geraden angehören, das als  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des tetraedalen Komplexes durch Verbindung entsprechender Punkte bei einer Projektivität des  $P_n$  in sich definiert ist. Der Fall  $n=2$  ist in einer früheren Arbeit von Morton und Chapple (dies. Zbl. **31**, 71) bereits behandelt worden. — Nimmt man  $A_0, A_1, \dots, A_n$  als Grundsimplex und die Projektivität des  $P_n$  in sich in der Gestalt  $X_i \rightarrow \alpha_i x_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) an, so lassen sich die genannten  $\infty^n$  Kurven  $C^n$  in der Gestalt

$X_i = \frac{\alpha_i x_i}{\alpha_i + \theta}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) schreiben und in naheliegender Weise auf die Punkte eines  $P_n$  abbilden. Es werden nun verschiedene Teilmengen dieser Gesamtheit von  $C^n$  und ihre Bildpunkte bei dieser birationalen Abbildung untersucht. Es handelt sich dabei z. B. um folgende Teilmengen: Gesamtheit der  $C^n$  in  $s$ -punktiger Berührung mit gegebener Hyperebene, solche, die einen gegebenen  $P_r$  oder auch allgemeinere Mannigfaltigkeiten treffen. Es werden einige abzählende Resultate über Dimension und Ordnungen der betr. Bildmengen hergeleitet. *Burau* (Hamburg).

**Benedicty, Mario:** Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. VIII. S. 6, 697—702 (1949).

Werden auf einer Kurve des Geschlechtes Null  $\pi$  neutrale Paare von getrennten Punkten fixiert, so entsteht eine Kurve vom virtuellen Geschlechte  $\pi$ . Als Jacobische Mannigfaltigkeit dieser letzten Kurve kann in solcher Weise ein linearer Raum  $S_\pi$  genommen werden, daß [nach einem Resultate des Ref.: Ann. Mat. pura appl. Bologna, IV. S. 28, 299—315 (1948)] die Transformationen

$$(1) \quad x'_h = c_h x_1^{a_{h1}} x_2^{a_{h2}} \dots x_\pi^{a_{h\pi}}, (c_h \neq 0, h = 1, 2, \dots, \pi),$$

$a_{hk}$  ganz,  $|a_{hk}|$  unimodular

alle Transformationen bilden, die durch lineare Kongruenzen zwischen den als virtuell erster Gattung betrachteten Integralen dargestellt sind. — Die Transformationen (1) stellen nun eine gemischte und mit abzählbar unendlich viele Scharen gebildete kontinuierliche Gruppe von Cremonatransformationen des  $S_\pi$  in sich dar. Um der Lösung der, vom Ref. gestellten, Frage der Bestimmung der homaloidischen Systeme der Transformationen (1) näher zu kommen, bestimmt Verf. ein System von Erzeugenden für die Gruppe (1). Verf. beweist nämlich, daß, für  $\pi \geq 2$ , die Affinitäten  $x'_h = c_h x_h$ , die Homographien  $x'_i = x_{i+1}/x_1$ ,  $x'_n = 1/x_1$ ;  $x'_1 = x_2$ ,  $x'_2 = x_1$ ,  $x'_m = x_m$  und die quadratische Transformation  $x'_1 = x_1 x_2$ ,  $x'_n = x_n$  ( $h = 1, 2, \dots, \pi$ ;  $l = 1, 2, \dots, \pi - 1$ ;  $m = 3, 4, \dots, \pi$ ;  $n = 2, 3, \dots, \pi$ ) die Gruppe (1) erzeugen. Für  $\pi \geq 3$  kann die quadratische Transformation durch die ebenfalls quadratische Transformation  $x'_1 = x_2 x_3/x_1$ ,  $x'_n = x_n$  ersetzt werden. Die Fälle  $\pi = 1, 2$  sind im gewissen Sinne Ausnahmefälle, da das Problem in voller Allgemeinheit nur für  $\pi \geq 3$  behandelt werden kann. *Conforto* (Rom).

**Büke, Macit:** Les surfaces d'ordre  $n$  de del Pezzo dans l'espace projectif à  $n$  dimensions. II. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A 14, 165—205 (1949).

Fortsetzung einer Untersuchung mit demselben Titel (dies. Zbl. 33, 17). In diesem 2. Teil werden die singulären Flächen  $F^8, F^7, F^6, F^5, F^4$  der Räume von  $S_8$  bis  $S_4$  bzw. betrachtet. Die möglichen Singularitäten dieser Flächen sind entweder konische Doppelpunkte oder biplanare und uniplanare Doppelpunkte verschiedener Arten. Es werden zunächst alle möglichen Singularitäten zusammengefaßt; es werden dann die verschiedenen Arten der gesuchten singulären Flächen vom reellen Standpunkt aus beschrieben, für jede Fläche werden angegeben: alle möglichen Abbildungen auf eine Quadrik oder auf einen Kegel 2. Ordnung; die Eigenschaften der Geradenkonfiguration; die Arten, wie jede Fläche aus einer Fläche derselben Reihe und höherer Ordnung durch Projektion erhalten werden kann; usw. Für die singulären  $F^4$  werden auch die Ausartungen in vier Ebenen diskutiert. *Togliatti*.

**Godeaux, Lucien:** Sur quelques surfaces-enveloppes du huitième ordre. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 9—17 (1947).

Die vorliegende Arbeit gehört in eine größere Reihe von Untersuchungen des Verf., worin er explizite Beispiele für Involutionen auf algebraischen Flächen und deren Bildflächen untersucht. In einer Note vom Jahre 1935 [Bull. Soc. Sci. Liège 4, 106—109 (1935); dies. Zbl. 11, 173] hatte er gefunden, daß die Fläche:

$$(1) \quad (\varphi_1 \varphi_1)^2 + (\varphi_2 \varphi_2)^2 + (\varphi_3 \varphi_3)^2 - 2\varphi_2 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 - 2\varphi_3 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_1 - 2\varphi_1 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2 = 0,$$

worin die  $q$  von der Ordnung  $m$  und die  $\varphi$  von der Ordnung  $n$  sind, Enveloppe eines



Systems von Flächen der Ordnung  $m + n$  ist. Hier wird nun der Fall  $m = n = 2$  untersucht, wobei (1) die Bildfläche einer Involution auf einer anderen Fläche  $F$  ist. Zunächst wird die einfachere Fläche

$$(2) \quad \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0$$

betrachtet, worin die  $\varphi_i$  vom Grade 4 sind. (2) ist auch Bildfläche einer Involution auf einer regulären Fläche mit  $p_a = p_g = 55$ . Dann wird die durch (1) dargestellte Fläche  $\Phi$  untersucht, ihre 112 Doppelpunkte angegeben, und es werden verschiedene Flächen bestimmt mit Involutionen, die auf  $\Phi$  abgebildet werden. Diese Flächen sind ihrerseits wieder Bildflächen von Involutionen auf 3 Flächen, die sich im  $P_5$  in der Form  $u_i^2 = \varphi_i$ ,  $v_i^2 = \psi_i$ ,  $\Phi = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) schreiben lassen und ersichtlich eine auf  $\Phi$  abgebildete Viererinvolution besitzen. Zum Schluß wird die im  $P_9$  gelegene Fläche

$$u_i^2 = \varphi_i, \quad v_i^2 = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Phi = 0$$

angegeben, die eine auf  $\Phi$  abgebildete 32er-Involution besitzt. Alle beschriebenen Involutionen werden im Normalraum der betr. Flächen durch projektive Involutionen induziert.

Burau (Hamburg).

**Godeaux, Lucien:** Sur les droites multiples des surfaces algebriques. Bull. Soc. Sci.<sup>9</sup> Liège 16, 74—77 (1949).

Verf. betrachtet den speziellen Typ einer quadro-kubischen Raumtransformation, bei der das homaloide Netz durch die Gesamtheit der Quadriken durch eine Gerade und 3 unendlich benachbarte Punkte außerhalb derselben definiert ist. Diese Transformation erweist sich als zweckmäßig bei der Untersuchung des Verhaltens einer Fläche mit  $s$ -facher Gerade  $g$  in der Umgebung derselben. Dazu wird  $g$  in die Fundamentalgerade der genannten quadratischen Transformation gelegt und die Aufspaltungswirkung auf die Singularität untersucht.

Burau (Hamburg).

**Nollet, Louis:** Contribution à l'étude des surfaces algébriques dont le système canonique est composé au moyen d'une involution. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 886—894 (1949).

Pour les surfaces algébriques qui satisfont à la condition  $8(q - 4) + \varrho - 1 \geq 0$ ,  $q$  étant l'irrégularité et  $\varrho$  le nombre base absolu, l'A. démontre que, si le système canonique pur est composé au moyen d'une involution  $J$ , l'ordre de  $J$  est  $\leq 8$  et, si cet ordre est  $\geq 5$ ,  $J$  est réféable à une réglée de genre positif, et pour ce genre une borne supérieure est donnée. La démonstration est faite en ramenant le théorème à un lemme préalablement établi, ce qui se fait au moyen d'une inégalité de Severi bien connue. D'autres applications du lemme cité sont faites: d'une part aux cas où l'involution  $J$  n'est pas réféable à une réglée et d'autre part à l'étude des surfaces pour lesquelles on a  $p^{(1)} \leq 3p_g + q - 7$ , surfaces qui ont été considérés récemment par Jongmans (ce Zbl. 33, 212).

Ancochea (Madrid).

**Severi, Francesco:** Teoremi di regolarità sopra una superficie algebrica. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 6, 346—352 (1947).

Das adjungierte System  $|C'|$  eines linearen Kurvensystems  $|C|$  vom Geschlecht  $\pi$  auf einer algebraischen Fläche  $F$  vom arithmetischen Geschlecht  $p_a$  heißt regulär, wenn seine Dimension  $r' - p_a + \pi - 1$  ist. Picard [J. reine angew. Math. 129, 275—286 (1905)] hat die Regularität von  $|C'|$  für das lineare System  $|C|$  der ebenen Schnitte von  $F$  bewiesen (unter den üblichen Voraussetzungen über die Singularitäten von  $F$  im  $R_3$ ). Verf. hat [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 17, 465—470 (1908)] allgemeiner gezeigt, daß das adjungierte System jeder irreduziblen Kurve  $C$ , die in einem kontinuierlichen Kurvensystem (keinem irrationalen Büschel) enthalten ist, regulär ist, und hat daraus (dies. Zbl. 26, 71) für lineare Systeme, deren numerische Charaktere gewisse Ungleichungen erfüllen, weitere Regularitätskriterien gefolgert, allerdings unter der Voraussetzung, daß ihre charakteristische Schar vollständig sei, was jedoch nur für arithmetisch effektive und halb-

reguläre Kurven gilt [Comment math. Helvetici **15**, 238—248 (1943); Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **23**, 149—181 (1944)]. Daher legt Verf. hier eine neue Ableitung dieser Regularitätskriterien dar. — Zunächst wird die Regularität des adjungierten Systems  $|C'|$  auch für eine reduzible Kurve  $C$  mit vielfachen Komponenten bewiesen, falls sie zusammenhängend ist und mindestens einer ihrer irreduziblen Bestandteile in einem kontinuierlichen System (keinem irrationalen Büschel) enthalten ist. Daraus folgt nun in Verbindung mit einem Existenzkriterium des Verf. der Satz: Wenn der virtuelle Grad  $n$  und das virtuelle Geschlecht  $p$  einer Kurve  $C'$  den Ungleichungen  $3n > 4(p-1)$ ,  $2n \geq 3(p-1) - \omega' - p_a$  ( $\omega' =$  Grad des nicht reduzierten kanonischen Systems) genügt, so ist  $|C'|$  das adjungierte System einer effektiven Kurve  $C$  und folglich regulär, falls  $C$  die eben erwähnten Bedingungen erfüllt. Dieser Satz vereinfacht sich in dem Falle, wo jede effektive Kurve auf  $F$  einen positiven virtuellen Grad besitzt: dann genügen die beiden Ungleichungen  $3n > 4(p-1)$ ,  $2n > 3(p-1) - \omega' - p_a$ . Unter denselben Voraussetzungen über  $F$  ist ein lineares System  $|C|$  regulär und nicht spezial, d. h. von der Dimension  $r = n - p + p_a + 1$ , falls  $C$  irreduzibel ist und das virtuelle Geschlecht  $p$  und den virtuellen Grad  $n > \frac{3}{2}(p-1)$  besitzt. In diesem Falle sind auch (bei  $p_a \geq 1$ ) die mehrkanonischen Systeme regulär. Gröbner (Innsbruck).

**Castelnuovo, Guido:** Sul numero dei moduli di una superficie irregolare. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **7**, 3—7, 8—11 (1949).

Cette note ouvre des perspectives de recherches nouvelles et sans doute difficiles, par l'introduction de nouveaux invariants superficiels dont la dépendance des caractères connus n'est pas encore établie. Sont à noter en particulier, le nombre des courbes linéairement indépendantes du système  $|2C + 2K|$  passant par les groupes base et jacobien d'un faisceau  $|C|$ , ( $K$  système canonique), et le nombre  $\omega$  tel qu'une bicanonique doive satisfaire à  $I + 4 - \omega$  conditions pour contenir le groupe  $G_{I+4}$ , des points doubles du faisceau transcendant  $J = \text{Cte.}$ , où  $J$  représente une égalité entre intégrales simples de 1<sup>o</sup> espèce. — Par la considération de séries où interviennent ces caractères, et les majorant, l'A. obtient pour les surfaces irrégulières privées de faisceau irrationnel, l'inégalité:  $M \leq 3p_g - 2p_a$  qui restreint le nombre des modules, beaucoup plus que les inégalités jusqu'ici connues.

B. d'Orgeval (Grenoble).

**Vaccaro, Giuseppe:** Sugli spazi lineari luoghi di flessi di una ipersuperficie algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **7**, 61—66 (1949).

Auf einer algebraischen Hyperfläche  $V_{r-1}^n$  eines Raumes  $S_r$  bezeichnet man mit dem Namen Inflexionspunkte diejenigen einfachen Punkte der  $V_{r-1}^n$ , in denen jede Tangente allgemeiner Lage eine dreipunktige Berührung mit  $V_{r-1}^n$  aufweist. Verf. findet hier die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $V_{r-1}^n$  einen  $S_k$  Ort von Inflexionspunkten enthält. Diese Bedingung ist die Existenz im  $S_k$  eines  $V_{k-1}^{n-1}$  Ortes von doppelten bihyperplanaren Punkten von  $V_{r-1}^n$ . Der Satz wird zunächst im Falle  $k = 1$  geometrisch und analytisch bewiesen; die Ausdehnung auf einen beliebigen höheren Wert von  $k$  ist unmittelbar. Verf. gibt auch die Ausdehnung auf den Fall an, wo alle Punkte von  $S_k$   $s$ -fache Punkte der  $V_{r-1}^n$  sind, unter der Voraussetzung, daß jede Tangente an  $V_{r-1}^n$  in einem Punkte von  $S_k$  eine  $(s+2)$ -punktige Berührung mit  $V_{r-1}^n$  hat. E. G. Togliatti (Genova).

**Tanturri, Giuseppe:** Involuppi di piani che secano proiettivamente una  $F^3$  di  $S_3$ . Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 48—52 (1949).

Die Ebenen des Raumes, die eine algebraische  $F^3$ , die irreduzibel und keine Regelfläche ist, in Kurven dritter Ordnung mit derselben absoluten Invariante  $J$  schneiden, bilden eine algebraische Enveloppe der Klasse 12. Läßt man  $J$  beliebig

variieren, so erhält man eine Schar von solchen Enveloppen. Verf. beweist, daß die Enveloppen dieser Schar dann und nur dann alle reduzibel sind, wenn die  $F^3$  einen uniplanaren Doppelpunkt oder drei biplanare Doppelpunkte besitzt. Beweisgang wie in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. 32, 115). *Conforto* (Rom).

**Scott, D. B.: Point-curve correspondences. III. Correspondences on a single surface.** Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 342—353 (1949).

Fortsetzung einer Untersuchung über Punkt-Kurvenkorrespondenzen zwischen zwei algebraischen Flächen [Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 135—145 (1945); 42, 229—239 (1946)]. Hier wird der Fall betrachtet, daß die zwei gegebenen Flächen mit einer einzigen Fläche  $F$  zusammenfallen. Ist  $T$  eine Korrespondenz auf  $F$ , die jedem Punkte eine Kurve entsprechen läßt, so kann man, wie im allgemeinen Falle, die Korrespondenz  $T^*$  betrachten, die zwischen zwei Kurven oder auf einer Kurve von  $F$  induziert wird; umgekehrt kann man fordern, eine gegebene  $T^*$  auf eine  $T$  zu erweitern. Der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung ist aber die Definition einer Wertigkeit für  $T$ . Als Wertigkeitskorrespondenz wird eine  $T$  definiert, wenn die  $T^*$ , die sie auf jeder eigentlichen Kurve von  $F$  induziert, eine Doppelwertigkeitskorrespondenz ist, welche jeden invarianten Zykel  $\gamma$  in einen zu einem Zykel der Form  $n\gamma$  ( $n \neq 0$ ) homologen Zykel und jeden Nullzykel in einen berandeten Zykel verwandelt. Man findet unter anderem, daß jede  $T$  in diesem Sinne eine Wertigkeitskorrespondenz ist, nur wenn die Riemannsche Matrix der einfachen Integrale 1. Gattung von  $F$  keine komplexe Multiplikation gestattet. Es folgt ein Ausdruck für die Doppelkurve von  $T$ , der der Formel von Cayley und Brill ähnlich ist. Es folgen weiter drei Vorschläge, den numerischen Wert einer Wertigkeit von  $T$  zu definieren; man könnte z. B. als solche die kleinstmögliche Wertigkeit der auf den eigentlichen Kurven von  $F$  induzierten  $T^*$  erklären. Im letzten Teil einige Betrachtungen über die Ausdehnung des Begriffs einer Doppelwertigkeit auf Punkt-Kurvenkorrespondenzen. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Mathieu, Paulette: Extensions à l'espace à cinq dimensions de la correspondance involutive de Reye.** C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1132—1134 (1950).

Die allgemeine kanonische Kurve des Geschlechts 6 ist eine  $C^{10}$  des Raumes  $S_5$ , die auf  $\infty^5$  Quadriken  $Q$  liegt. Diejenigen Quadriken  $Q$ , die einen Punkt  $M_1$  enthalten, haben noch einen weiteren Punkt  $M_2$  gemein; die  $\infty^5$  Quadriken  $Q$  definieren so im Raume  $S_5$  eine involutorische Korrespondenz  $I$ , die als eine Verallgemeinerung der bekannten Reyeschen Involution des dreidimensionalen Raumes aufgefaßt werden kann (die durch ein Quadriken-system mit 6 Basispunkten definiert wird). Durch eine lineare Abbildung der Quadriken  $Q$  auf die Hyperebenen eines Raumes  $S'_5$  erhält man zwischen  $S_5, S'_5$  eine algebraische (2,1) Transformation  $R$ . Ziel des Verf. ist die Untersuchung der beiden Transformationen  $I$  und  $R$ . Die Kurve  $C$  wird als Schnitt einer  $Q$  mit einer Fläche  $F^5$  des Raumes  $S_5$  betrachtet; es gibt dann fünf durch  $F^5$  hindurchgehende Segresche  $W^3_3$ , die, zusammen mit der Sehnemannigfaltigkeit  $V^{30}_3$  von  $C$  die Fundamental-mannigfaltigkeit von  $I$  bilden; die Doppelhyperfläche von  $I$  ist die Jacobische  $V^6_4$  des Quadriken-systems  $|Q|$ ; die Verzweigungs-hyperfläche von  $R$  im  $S'_5$  wird auch untersucht usw. *E. G. Togliatti* (Genova).

### Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

**Seifert, L.: Sur la surface engendrée par les cercles osculateurs d'une courbe gauche.** Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 49—D 58 und franz. Zusammenfassg. D 58. (1950) [Tschechisch].

L'auteur étudie les systèmes de lignes de courbure de la surface considérée et les surfaces développables engendrées par les normales le long de ces courbes. Il étudie surtout la surface engendrée par les cercles osculateurs d'une courbe gauche  $\Gamma$  dont la courbure est constante. Si  $\Gamma$  est une hélice, l'auteur donne aussi beaucoup des constructions intéressantes. *Autoreferat.*



**Kruppa, Erwin:** Das Analogon zu einem Satz von Cesàro über Bertrand-Kurven im Bereich der Strahlflächen. *Mh. Math.*, Wien **54**, 45—54 (1950).

Es wird zunächst zu einer Strahlfläche (= Regelfläche) in üblicher Art ein begleitendes Dreiein eingeführt. Dann wird die Aufgabe behandelt: Bedingungen für die Strahlfläche herzuleiten, damit es eine in ihrem begleitenden Dreiein befestigte Gerade gibt, deren Punkte bei der Bewegung des Dreieins Bahnen beschreiben, die die Gerade stets rechtwinklig treffen. Im besonderen ergibt sich ein Satz Cesàros. Auch Gegenstücke zu den Kurven von Bertrand werden betrachtet.

*W. Blaschke (Hamburg).*

**Löbell, Frank:** Linienelementfunktionen und geodätische Ableitungen in der Flächentheorie. *Math. Ann.*, Berlin **121**, 427—445 (1950).

Eine Funktion  $\Phi$ , die von einem Flächenpunkt  $\mathfrak{x}$  und von einem die Fläche in  $\mathfrak{x}$  berührenden Einheitsvektor  $\mathfrak{e}$  abhängt, wird als eine Funktion des Linienelementes  $L(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$  der Fläche angesehen. Es wird insbesondere die Ableitung  $\delta:ds$  von  $\Phi$  längs einer Flächenkurve in Richtung  $\mathfrak{t}$  durch  $\mathfrak{x}$  eingeführt bei Parallelverschiebung (Übertragung) von  $\mathfrak{e}$  längs der Kurve. Wenn  $\mathfrak{t}$  mit  $\mathfrak{e}$  zusammenfällt, wird von „Längsableitung“, wenn  $\mathfrak{t}$  zu  $\mathfrak{e}$  rechtwinklig ist, von „Querableitung“ gesprochen. Unter Verwendung der sich mit den eingeführten Ableitungen ergebenden Rechnungen folgt unter anderen eine einfache Deutung der Gleichungen von Mainardi und Codazzi.

*W. Blaschke (Hamburg).*

**Pogorelov, A. V.:** Innere Abschätzungen für die Ableitungen des Radius-Vektors eines Punktes einer geschlossenen, regulären, konvexen Fläche. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **66**, 805—808 (1949) [Russisch].

Verf. betrachtet eine reguläre konvexe Fläche  $F$  mit lokalen geodätischen Koordinaten  $(u, v)$ , die dann das Bogenelement  $ds^2 = du^2 + g dv^2$  in der Umgebung des Punktes  $u = v = 0$  ergeben, wobei zu  $v = 0$  der geodätische Bogen  $\gamma$  gehöre;

er setzt dann  $g_{\gamma(i,j)}(X) = \frac{\partial^{i+j} g(u, v)}{\partial u^i \partial v^j} \Big|_{0,0}$  in Abhängigkeit von  $\gamma, X$  und den Indizes und führt die Bezeichnung  $m_k$  für die obere Grenze des Absolutbetrages von  $g_{\gamma(i,j)}$  ( $i + j = k$ ) ein; wegen des positiven Krümmungsmaßes ist  $g_{\gamma(2,0)} < 0$  mit der unteren Grenze  $\bar{m}$ . Dann wird daran erinnert, daß die Radien der In- und Umkugel nur von  $m$  und  $m_2$  abhängen. Ein Festpunkt  $O$  wird nun im Innern der Inkugel gewählt und für den Abstand  $r$  zwischen  $O$  und dem variablen Flächenpunkt  $X$  werden in Abhängigkeit von dem obigen Bogen  $\gamma$  durch  $X$  Ausdrücke

$r_{\gamma(i,j)}(X) = \frac{\partial^{i+j} r}{\partial u^i \partial v^j} \Big|_{0,0}$  eingeführt. Der Satz des Verf. behauptet dann die Existenz von oberen Grenzen für  $r_{\gamma(i,j)}$ , die bei  $i = 1, j = 0$  und  $i = 0, j = 1$  nur von  $\bar{m}$  und  $m_2$ , bei  $i + j \geq 2$  nur von  $\bar{m}$  und  $m_{k+2}$  abhängen. Der Beweis macht, insbesondere wenn  $i + j \geq 3$  ist, einige Schwierigkeiten.

*Burau.*

**Simonart, Fernand:** Sur l'équation différentielle quadratique d'un réseau orthogonal et isotherme. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **35**, 346—356 (1949).

L'A., partendo dall'equazione generale delle reti piane isoterme, indica come pone ottenersi un teorema di Haag: la proiezione sul piano  $x, y$  della rete delle asintotiche di una superficie armonica è una rete ortogonale e isoterma. Tra i risultati ottenuti si ha il seguente: affinché la rete ortogonale definita dell'equazione differenziale

$$dy^2 + 2A dx dy - dx^2 = 0$$

sia isoterma, occorre e basta che risulti

$$\frac{A_{xx} + A_{yy}}{A_x^2 + A_y^2} = \frac{2A}{1 + A^2}.$$

Inoltre è  $A = U/V$ , con  $U$  e  $V$  funzioni armoniche associate.

*Luigi Amerio (Milano).*

**Simonart, Fernand:** Réseaux isothermes sur une surface. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 924—930 (1949).

Vengono estesi alle superficie in forma parametrica i risultati ottenuti per il piano in una nota precedente (vedi il precedente lavoro). *Luigi Amerio* (Milano).

**Dekker, David B.:** Hypergeodesic curvature and torsion. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1151—1168 (1949).

L'A. esprime in forma tensoriale l'equazione differenziale del 2° ordine rappresentante una famiglia  $\infty^2$  di ipergeodetiche di una superficie  $S$ : queste risultano così caratterizzate dall'annullarsi delle componenti contravarianti di un vettore, mediante il quale l'A. definisce la curvatura ipergeodetica. I piani osculatori alle ipergeodetiche uscenti da un punto  $P$  di  $S$  inviluppano un cono  $\Gamma$  (di 2° ordine e 3ª classe): ogni direzione tangente in  $P$  determina un' ipergeodetica e di conseguenza una generatrice di  $\Gamma$ . La curvatura ipergeodetica di una curva  $C$  di  $S$ , uscente da  $P$ , si può allora interpretare geometricamente come curvatura ordinaria della proiezione  $C'$  di  $C$ , fatta sul piano tangente in  $P$  nella direzione della generatrice di  $\Gamma$  determinata dalla tangente a  $C$  in  $P$ ; la torsione ipergeodetica di  $C$  è invece definita come torsione dell'ipergeodetica avente in  $P$  la stessa tangente di  $C$ . L'A. dimostra poi che un' ipergeodetica è piana solo quando gli  $\infty^1$  elementi di contatto dei suoi piani osculatori con i relativi coni-inviluppo ( $\Gamma$ ) formano una sviluppabile. Queste proprietà si presentano come convenienti generalizzazioni di altre già note e relative sia al caso che il cono  $\Gamma$  si riduca ad un fascio di piani, sia al caso più particolare delle geodetiche ordinarie.

*P. Buzano* (Torino).

**Sauer, Robert:** Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen. Math. Z., Berlin 52, 611—622 (1950).

Bekannten Sätzen über pseudosphärische Flächen — die Asymptotenlinien bilden ein Tschebyscheff-Netz, sie haben konstante Windungen, das Produkt beider Windungen ist gleich dem Krümmungsmaß der Fläche, die Fläche ist durch zwei sich schneidende Asymptotenlinien bestimmt, sie kann auf unendlich viele Dreh- und Schraubflächen mit Erhaltung der Längen und Windungen der Asymptotenlinien abgewickelt werden, sie läßt eine einparametrische Schar von Biegungen zu, bei denen sich die Längen und Krümmungen der Asymptotenlinien nach dem Gesetz  $\bar{s}' = \lambda s'$ ,  $\bar{s}'' = (1/\lambda) s''$ ,  $\bar{k}' = (1/\lambda) k'$ ,  $k'' = \lambda k''$  ändern — werden analoge über P(arallelogramm)-Gitter an die Seite gestellt. Parallelogramm heißt ein (windschiefes) Viereck mit gleichen Gegenseiten  $s'$ ,  $s''$ . Alle Gitterparallelogramme haben dieselben Seiten  $s'$ ,  $s''$ , ihre Seiten bilden also zwei Scharen von Streckenzügen mit den konstanten Seitenlängen  $s'$  bzw.  $s''$ ; die in einer Ecke zusammenstoßenden vier Seiten sollen in einer Ebene liegen. Geeignet definiert werden Krümmungen und Windungen dieser Streckenzüge und das Krümmungsmaß einer Masche, das sich als das konstante Krümmungsmaß des Gitters erweist. Jedem P-Gitter lassen sich V(orb)-Gitter so zuordnen, daß einer Seite des P-Gitters eine parallele des V-Gitters entspricht; wie im reziproken Kräfteplan entsprechen dabei den Seiten einer Masche des P-Gitters solche Seiten des V-Gitters, die in einer Ecke zusammenstoßen. In den V-Gittern sind also die Gittermaschen eben, aber keine Parallelogramme; die vier in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten bilden zwei Paare gleicher Winkel, sie liegen nicht in einer Ebene. Die V-Gitter sind die Analoga der V(orb)-Flächen mit einem Netz konjugierter geodätischer Linien. Es besteht die Möglichkeit der Überführung der Gitter in die Netze der entsprechenden Flächen durch einen Grenzprozeß. — Wie in anderen Gebieten werden also hier zu differentialgeometrischen Sätzen hinterher differenzengeometrische Begriffe und Sätze entwickelt, die sowohl ein eigenes Interesse beanspruchen dürfen als für die lebendige anschauliche Erfassung differentialgeometrischer Verhältnisse fruchtbar gemacht werden können. Zu den in dieser Richtung angestellten Untersuchungen hat Verf. bereits eine Reihe von Beiträgen geliefert.

*Rembs* (Berlin).

**Jonas, Hans:** Mit einem beliebigen Paare von Flächen gleichen konstanten Krümmungsmaßes verknüpfte räumliche Beziehungen. *J. reine angew. Math.*, Berlin 186, 193—220 (1949).

Die wesentlichsten Ergebnisse der umfangreichen Abhandlung sind: Zwei pseudosphärische Flächen ( $K = -1$ ) werden mit Entsprechen der Asymptotenlinien ( $\alpha, \beta$ ) bei Gleichheit deren Bogenlängen und Übereinstimmung ihres Windungssinnes punktweise aufeinander bezogen. (Gestalt des gemeinsamen Linienelementes  $ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos \theta d\alpha d\beta + d\beta^2$ , zwei Integrale der partiellen Differentialgleichung  $2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta$  bestimmen die Flächen.) Legt man durch die Mitte zwischen entsprechenden Flächenpunkten die Parallelen zu den beiden Flächennormalen, so bilden ihre Winkelhalbierenden die zueinander rechtwinkligen Strahlen zweier  $W$ -Kongruenzen, auf deren Brennflächenmänteln die Asymptotenlinien ( $\alpha, \beta$ ) denen der pseudosphärischen Flächen mit gleichem Windungssinn entsprechen. Diese vier Brennmäntel sind die Mittelflächen zu den vier Paaren isometrischer Flächen, die von Punkten der Normalen der pseudosphärischen Flächen beschrieben werden. (Diese Punkte besitzen von den Flächenpunkten jeweils gleiche oder entgegengesetzt gleiche Entfernungen.) Die Moutardschen Gleichungen der vier Brennmäntel des durch das pseudosphärische Flächenpaar so bestimmten Systems rechtwinkliger  $W$ -Kreuze sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, je 5 durch

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 - \varphi^2 = 1$$

verbundene Integrale zu besitzen. ( $\xi, \eta, \zeta$  sind Richtungskosinusse der Flächennormalen,  $\varphi$  die transformierende Lösung, die den Übergang zum komplementären Brennmantel bewirkt.) Wird das pseudosphärische Flächenpaar Bäcklundschen Transformationen unterworfen, die gleiche charakteristische Konstante besitzen, so hängen die schon betrachteten und die aus den transformierten Flächen konstruierten  $W$ -Kongruenzen miteinander durch asymptotische Transformationen der Brennmäntel (durch berührende  $W$ -Kongruenzen vermittelt) zusammen. — Aus der Anwendung dieser Sätze auf speziell gewählte pseudosphärische Flächenpaare fließen zahlreiche neue Erkenntnisse. (Anwendung auf pseudosphärische Kongruenzen usf.)

*H. R. Müller (Graz).*

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Longo, Carmelo:** Sulle trasformazioni tra piani che mutano un determinato fascio di rette in un fascio di rette. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 7, 66—72 (1949).

L'A. studia alcune particolari trasformazioni puntuali tra piani mutanti un fascio di rette dell'uno in un fascio di rette dell'altro. Con scelta opportuna del riferimento dette trasformazioni sono tutte rappresentabili mediante equazioni del tipo:  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = \psi(x, y)$  e le ulteriori proprietà a loro imposte si traducono in particolarità per la funzione  $\psi(x, y)$ . L'A. considera le proprietà seguenti relative alle direzioni inflessionali in un generico punto, una delle quali coincide con la  $x = \text{cost.}$ : 1. una 2<sup>a</sup> direzione inflessionale coincida con la  $x = \text{cost.}$ ; 2. le altre due direzioni inflessionali coincidano fra loro; 3. le altre due direzioni inflessionali determinino sulla retta impropria coppie di un'involuzione; 4. le altre due direzioni inflessionali determinino sulla retta impropria due punti fissi. — Nei quattro casi l'A. determina tutte le trasformazioni di De Jonquières che godono delle proprietà indicate.

*P. Buzano (Torino).*

**Wilkins jr., J. Ernest:** Some remarks on ruled surfaces. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 1169—1176 (1949).

In un punto generico di una rigata  $S$  non sviluppabile vi sono  $\infty^1$  superficie cubiche aventi contatto del 5° ordine con  $S$ : l'A. le classifica riferendosi ai punti doppi che esse hanno fuori del piano tangente comune. Considera poi in questo



piano le  $\infty^1$  cubiche aventi le tangenti asintotiche come tangenti nodali e contatto del 5° ordine con la curva intersezione di  $S$  col relativo piano tangente: per una di dette cubiche l'ordine di contatto sale a 6. *P. Buzano* (Torino).

**Stakowski, Walter:** Invariantentheorie der Raumkurven im vierdimensionalen projektiven Raum. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 200—204 (1949).

Durch Kopplung von Proportionalitätsfaktor und Parametertransformation läßt sich für die Kurve  $\mathfrak{x}(t)$  im projektiven vierdimensionalen Raum immer erreichen, daß der Klammerfaktor  $(\mathfrak{x} \mathfrak{x}' \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''' \mathfrak{x}''') = K \neq 0$  wird, woraus durch Differentiation die Grundgleichung der Kurve  $\mathfrak{x}'' = 20a \mathfrak{x}''' + d\mathfrak{x}'' + e \mathfrak{x}' + g \mathfrak{x}$  erhalten wird. Diese Gleichung ergibt sich aus einem System linearer Ableitungsgleichungen für ein Begleitsimplex  $\mathfrak{x}, t, \eta, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}$ , wodurch  $d, e, g$  eindeutige Funktionen von vier Funktionen  $a, b, \mu, c$  werden:  $\mathfrak{x}' = t, t' = \eta + 4a \mathfrak{x}, \eta' = \mathfrak{z} + 6a t - 2b \mathfrak{x}, \mathfrak{z}' = \mathfrak{p} + 6a \eta - 3b t + \mu \mathfrak{x}, \mathfrak{p}' = 4a \mathfrak{x} - 2b \eta + \mu t + c \mathfrak{x}$ . Unter Benutzung der lokalen Koordinaten in bezug auf ein Begleitsimplex folgt, daß eine quadratische Hyperfläche  $\Omega$  existiert, die die Kurve neunpunktig berührt, für  $c = 0$  zehnpunktige Berührung zeigt und für  $b = c = 0$  die ganze Kurve enthält.  $b = \mu = c = 0$  charakterisiert die Kurven vierter Ordnung. Der Übergang zu entsprechenden Hyperebenenkoordinaten wird gegeben. *E. M. Bruins* (Amsterdam).

**Stakowski, Walter:** Zur Geometrie der Raumkurven im vierdimensionalen projektiven Raum. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 377—382 (1949).

(S. auch vorsteh. Referat.) Verf. gibt die Darstellung der sechs- und siebenpunktig berührenden  $C_4$  in einem beliebigen Begleitsimplex und die Bedingungen dafür, daß diese zu gleicher Zeit 6- oder 7-Hyperebenen- $C_4$  sind. Mittels der Halbinvariante  $b$  führt er die Projektivbogenlänge  $s = \int \sqrt[3]{b} dt$  ein, und mit  $s$  als Parameter erhält er die natürlichen Gleichungen der Kurve. Für die  $W$ -Kurven sind  $a, b, c, \mu$  Konstanten, und eine Kurve ist dann und nur dann  $W$ -Kurve, wenn die Koeffizienten der Grundgleichung konstant sind. Verf. diskutiert die Torsalsysteme ( $a = 0$ ) und die Fälle  $b = 0, c = 0, b = \mu = 0, c = \mu = 0$ . *E. M. Bruins*.

**Norden, A. P.:** Riemannsche Metrik auf Flächen des projektiven Raumes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 345—357 (1948) [Russisch].

Verf. betrachtet Kurvennetze auf einer Fläche des dreidimensionalen projektiven Raumes. Ein Netz heiße  $J$ -Netz, falls es von der Art ist, daß seine Greenschen Achsen und Kanten Kongruenzen bilden, die in bezug auf die Fläche konjugiert bzw. harmonisch sind. Verf. gibt an, daß die innere Geometrie eines solchen Netzes durch ein Paar zueinander konjugierter Riemannscher Maßbestimmungen charakterisiert ist. Außer diesem Netz werden noch zwei weitere mit  $J_1$  und  $J_0$  bezeichnete Netze betrachtet. Ersteres besteht aus denjenigen Kurvenscharen, deren Tangenten eine nicht in ein Ebenenpaar ausgeartete Fläche zweiter Ordnung berühren, von der noch vorausgesetzt wird, daß sie nicht mit der gegebenen Fläche zusammenfällt. Das  $J_0$ -Netz wird durch zwei Ebenenbüschel ausgeschnitten, deren Achsen einen gemeinsamen Punkt besitzen. Es wird gezeigt, daß  $J_1$  und  $J_0$  Spezialfälle des  $J$ -Netzes sind. Jedes  $J$ -Netz, das weder ein  $J_1$ - noch ein  $J_0$ -Netz ist, wird als  $J'_1$ -Netz bezeichnet, falls die Krümmungen des Paares der zugeordneten Riemannschen Maßbestimmungen von Null verschieden sind, als  $J'_0$ -Netz, falls die Krümmungen verschwinden. Als Anwendungen dieser Betrachtungen wird unter anderem gezeigt, daß die projektive Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander dadurch charakterisiert werden kann, daß die beiden Paare zugeordneter Riemannscher Maßbestimmungen übereinstimmen. Hieraus kann gefolgert werden, daß die Existenz von  $J_0$ -Netzen die projektive Verbiegbarkeit charakterisiert. Leider verhindert die knappe Darstellung einen vollständigen Einblick in die Herleitung der angeführten Resultate. *O. Varga* (Debrecen).

**Koźmina, T. L.: Die Laplace-Transformation von dreifach konjugierten Flächen-systemen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 55, 187—189 (1947) [Russisch].

L'A. rappelle la définition des systèmes triples conjugués: ils comprennent trois familles de surfaces  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$  à un paramètre chacune; par tout point de l'espace  $A_0$  passe une surface  $S_i$  et sur cette surface les tangentes en  $A_0$  aux courbes  $(S_i, S_j)$ ,  $(S_i, S_k)$  sont conjuguées. On choisit un repère mobile  $A_0 A_1 A_2 A_3$  dont les arêtes  $A_0 A_1$ ,  $A_0 A_2$ ,  $A_0 A_3$ , dits axes du système en  $A_0$ , sont tangents en  $A_0$  aux courbes  $(S_2, S_3)$ ,  $(S_3, S_1)$ ,  $(S_1, S_2)$ . Le déplacement infinitésimal du tétraèdre  $(A_0 A_1 A_2 A_3)$  est défini par les équations

$$dA_0 = \omega_0^\alpha A_\alpha; dA_i = \omega_i^\alpha A_\alpha; \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3; i, j, k = 1, 2, 3.$$

Pour un système triple conjugué, on a les six équations nécessaires et suffisantes  $[\omega_j^k \omega^j \omega^\alpha] = 0$ ,  $j \neq k$ , dont la solution dépend de six fonctions arbitraires de deux arguments. On choisit pour  $A_1$  le second foyer du rayon  $A_0 A_1$  de la congruence  $\omega^3 = 0$ , ce qui permettra de supposer  $\omega_1^2 = \omega^1$ ; la tangente à la courbe  $\omega^1 = \omega^2 = 0$  de la surface  $(A_1)$  est dans le plan  $A_0 A_1 A_3$  et l'on prend pour  $A_3$  le point où  $A_0 A_3$  coupe cette tangente; on a alors  $\omega_3^2 = \omega^2$ ,  $[\omega_3^0 \omega^2 \omega_0] = 0$  et l'on prend les points

$$B_0 = A_1, \quad B_1 = A_2 + a_1^0 A_0 + a_1^3 A_3, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = c_1^3 A_3, \\ dB_i = \Omega_i^\alpha B_\alpha, \quad \omega_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta \omega^1 + b_\alpha^\beta \omega^2 + c_\alpha^\beta \omega_3$$

et l'on voit sans difficulté que  $[\Omega_i^j \Omega^j \Omega^k] = 0$ , donc que  $B_0$  engendre un système triple conjugué. L'A. envisage ensuite certaines particularisations de cette transformation.

B. Gambier (Paris).

**Vasil'ev, A. M.: Involutorische Systeme von Geradenkomplexen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 189—191 (1948) [Russisch].

Un complexe quelconque, suivant chacune de ses droites, admet  $\infty^1$  complexes linéaires tangents. Deux complexes passant par une droite sont dits en involution suivant cette droite si tout complexe linéaire tangent à l'un le long de cette droite est en involution avec tout complexe tangent à l'autre le long de cette droite. Si  $p$  complexes passant par une même droite sont deux à deux en involution,  $p \leq 4$ . Quatre systèmes à un paramètre chacun de complexes sont dits en involution si, pour chaque droite de la multiplicité qu'ils déterminent, les 4 complexes la contenant sont en involution. L'auteur indique le moyen d'obtenir de tels systèmes en involution. On attache au rayon  $(M_1, M_2)$  un repère mobile  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  dont le déplacement infinitésimal est défini par les équations

$$dM_i = \omega_i^\alpha M_\alpha; (\omega_i^\alpha)' = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k] \quad i, k = 1, 2, 3, 4;$$

l'indice de dérivation indique une dérivation extérieure. Les quatre systèmes en involution peuvent être définis par les équations  $\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0$ ,  $\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0$ ,  $\omega_1^3 - \omega_2^4 = 0$ ,  $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$ , avec les conditions

$$[(\omega_1^4 - \omega_2^3)', \omega_1^4 - \omega_2^3] = 0; [(\omega_1^3 - \omega_2^4)', \omega_1^3 - \omega_2^4] = 0; \\ [(\omega_1^4 + \omega_2^3)', \omega_1^4 + \omega_2^3] = 0; [(\omega_1^3 + \omega_2^4)', \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0.$$

La solution générale dépend de six fonctions arbitraires de deux arguments. — La congruence formée par l'intersection des complexes  $\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0$ ,  $\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0$  a pour foyers  $M_1$  et  $M_2$ , pour plans focaux  $(M_1, M_2, M_4)$  et  $(M_1, M_2, M_3)$ . Les asymptotiques des deux surfaces focales sont définies par la même équation  $(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^3)^2 = 0$ ; la congruence est donc  $W$ ; les complexes des deux autres familles coupent la congruence suivant les surfaces réglées réunissant les asymptotiques correspondantes. Le repère  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  peut être remplacé par l'un ou l'autre des deux suivants:

$$(M_1 + M_2, M_1 - M_2, M_3 + M_4, M_3 - M_4) \text{ ou } (M_1 + i M_2, M_1 - i M_2, M_3 + i M_4, M_3 - i M_4)$$

On peut échanger les indices 3 et 4. On a les deux théorèmes importants suivants. Théorème 1. Les six congruences, obtenues en coupant deux à deux les complexes du système, passant par un rayon arbitraire, sont  $W$ ; leurs foyers coïncident par couples et, sur chaque rayon, les trois couples obtenus se divisent harmoniquement mutuellement. Disposition analogue pour les plans focaux. Chacune des surfaces réglées obtenue par intersection de trois complexes réunit les asymptotiques des surfaces focales des congruences obtenues par l'intersection de deux de ces trois complexes. Quatre de ces congruences sont hyperboliques, les deux autres elliptiques. L'auteur rappelle la définition donnée par G. Koenigs du faisceau inflexionnel: par chaque rayon du complexe passent quatre surfaces développables contenues dans le complexe; le point de contact du rayon avec l'arête de rebroussement de l'une et le plan osculateur correspondant définissent le faisceau inflexionnel. Théorème 2. Les trois couples de points doubles des involu-

tions déterminées sur chaque rayon par les quatre centres des faisceaux inflexionnels coïncident avec les six points focaux des congruences obtenues par l'intersection des deux complexes du système. Disposition analogue pour les plans des faisceaux inflexionnels et les surfaces focales. — Ces résultats ont été obtenues avec l'aide du professeur Finikoff. *B. Gambier* (Paris).

**Lagrange, René:** Les courbes dans l'espace anallagmatique. *Acta math.*, København 82, 327—355 (1950).

Les éléments différentiels conformes d'une courbe  $\Gamma$  de l'espace à  $n$  dimensions se définissent, d'après E. Cartan, au moyen d'un  $(n+2)$ -sphère orthogonal mobile, lié au point courant de la courbe, constitué par  $n$  sphères à  $(n-1)$  dimensions et 2 points. On peut aussi définir les courbures conformes comme invariants formés avec les courbures de  $\Gamma$  dans un sous-espace de l'espace conforme  $E_c$ .  $\Sigma$  étant une sphère à  $(n-1)$  dimensions de l'espace euclidien  $E$  à  $n$  dimensions, le sous-groupe anallagmatique conservant  $\Sigma$  définit un espace riemannien  $E_\Sigma$  où l'on peut définir les  $(n-1)$  courbures  $\gamma_i$  de  $\Gamma$  avec un  $n$ -èdre de Frenet défini à partir du vecteur unitaire tangent au point courant  $A$ , les autres vecteurs différant suivant que le déplacement utilise l'équipollence dans  $E$  ou dans  $E_\Sigma$ . La comparaison des deux équipollences situe le  $n$ -èdre de Frenet dans  $E_\Sigma$  par rapport au  $n$ -èdre euclidien et fournit les expressions des courbures anallagmatiques  $\gamma_i$  dans  $E_\Sigma$  en fonction de l'absolu  $\Sigma$  et des courbures euclidiennes  $c_i$ , puis les expressions des courbures conformes  $\Gamma_i$  en fonction des courbures euclidiennes  $c_i$  ou des courbures anallagmatiques  $\gamma_i$ . Si l'on appelle  $ds$  l'élément d'arc euclidien,  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  les courbures dans  $E$ , puis  $d\sigma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  les éléments homologues dans  $E_\Sigma$ , on constate que dans  $E_c$ , l'élément d'arc conforme  $dS$  et les  $(n-2)$  dernières courbures  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{n-1}$  s'expriment en fonction des  $c_i$  et de leurs dérivées par rapport à  $s$  exactement comme au moyen des  $\gamma_i$  et de leurs dérivées par rapport à  $\sigma$ : par contre, une différence apparaît dans les deux expressions de  $\Gamma_1$ . Pour faire disparaître cette différence, l'A. fait remarquer que dans l'espace  $E_\Sigma$ , le  $n$ -vecteur de Frenet n'est pas la généralisation la plus naturelle du  $n$ -èdre euclidien, et, qu'au lieu d'utiliser des déplacements de vecteurs, il est plus avantageux de définir les courbures d'une courbe par l'étude de déplacements de plans dans l'espace euclidien  $E$ , et de sphères, dans  $E_\Sigma$ , orthogonales à  $\Sigma$ . L'A. prend pour  $n$ -plan de référence dans l'espace euclidien, non plus les faces du  $n$ -èdre de Frenet, mais les dérivés successifs du plan normal; son sommet n'est pas sur  $\Gamma$ , mais au centre de la sphère osculatrice et les formules du déplacement font intervenir le plan de l'infini qui joue le rôle, non pas de  $\Sigma$  dans  $E_\Sigma$ , mais de la sphère qui, dans  $E_\Sigma$  est orthogonale à  $\Sigma$  et aux  $n$ -sphères qui généralisent les faces du  $n$ -èdre euclidien. Le Mémoire actuel utilise l'algorithme et les notations du travail paru aux *Ann. sci. Ecole norm. sup.* III. S. 59, 1—47 (1942); ce *Zbl.* 27, 83. *B. Gambier* (Paris).

**Müller, Hans Robert:** Die Böschungslinien des elliptischen Raumes. *Mh. Math.*, Wien 53, 151—164 (1949).

Als „Böschungslinie“ im elliptischen Raum wird eine Linie bezeichnet, die eine eingliedrige Schar Cliffordscher Parallelen unter festem Winkel trifft. Ihre Tangenten bilden eine „Böschungsfläche“. Es werden auf diese Gebilde bekannte Ergebnisse der Euklidischen Geometrie übertragen, die von Bertrand, Forsyth, Salkowski und Appell stammen. *W. Blaschke* (Hamburg).

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

**Sun, J. Tseying:** A note on the isometric correspondence of Riemann spaces. *Duke math. J.* 16, 571—573 (1949).

Ein Riemannscher Raum  $R_n$  wird als von der Kategorie  $p$  bezeichnet, falls die Anzahl sämtlicher unabhängiger absoluter skalarer Invarianten  $p$  beträgt. Sind zwei  $R_n$  der gleichen Kategorie  $p$  gegeben, so tritt das Problem auf, wann zwei solche  $R_n$  aufeinander isometrisch abbildbar sind. Das Problem ist bis jetzt für  $R_n$  mit



$p = n$  und  $R_2$  ( $p = 2$ ),  $p = 1$ ,  $p = 0$  gelöst. Verf. gibt eine Lösung für  $R_n$  mit  $p = n - 1$ . Es bezeichne  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  die Basisinvarianten des  $R_n$  der Kategorie  $n - 1$ ,  $I_{ik}$  und  $J_i$  ( $i, k = 1, \dots, n - 1$ ) bedeuten die aus ihnen gemäß  $I_{ik} = g^{\alpha\beta} I_{i,\alpha} I_{k,\beta}$ ,  $J_i = g^{\alpha\beta} I_{i,\alpha\beta}$  ableitbaren Invarianten ( $I_{i,\alpha}$  und  $I_{i,\alpha\beta}$  bezeichnen kovariante Ableitungen der  $I_i$ ), schließlich seien die entsprechenden Invarianten des  $R_n^*$  der Kategorie  $n - 1$ , mit  $I_i^*, I_{ik}^*$  und  $J_i^*$  bezeichnet. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die isometrische Abbildbarkeit des  $R_n$  auf  $R_n^*$  bestehen dann darin, daß die Gleichungen  $I_i = I_i^*$ ,  $I_{ik} = I_{ik}^*$ ,  $J_i = J_i^*$  eine Lösung  $x^{*\alpha} = x^{*\alpha}(x^1, \dots, x^n)$  besitzen, die die Koordinaten  $x^\alpha$  des  $R_n$  auf diejenigen  $x^{*\alpha}$  des  $R_n^*$  beziehen.

O. Varga (Debrecen).

**Tonolo, Angelo:** Sulla varietà riemanniana normali a tre dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 438—444 (1949).

Verf. charakterisiert dreidimensionale Riemannsche Räume  $R_3$  für die die drei Hauptkongruenzen (Kongruenzen der Haupttrichtungen des Riccischen Tensors) die Normalkongruenzen eines dreifach orthogonalen Flächensystems sind, durch Angabe von drei Gleichungen. Diese Gleichungen enthalten Invarianten des  $R_3$ , die aus dem Fundamentaltensor, dem Riccischen Tensor und den kovarianten Ableitungen letzteren Tensors bestehen.

O. Varga (Debrecen).

**Verbickij, L. L.:** Metrisch-differentielle Charakteristik der Hyperflächen zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1117—1118 (1948) [Russisch].

Les hyperquadriques peuvent être caractérisées par leurs propriétés métriques différentielles. Soit  $ds^2 = dr^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ ,  $\bar{n} d^2 r = \pi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  les deux formes fondamentales de Gauss d'une hypersurface  $v_{n-1}$  plongée dans l'espace euclidien  $E_n$ . Le tenseur

$$\vartheta_{ijk} = \pi_{ij|k} - \frac{K_i \pi_{jk} + K_j \pi_{ki} + K_k \pi_{ij}}{(n+1)K}, \text{ avec } K = \frac{\text{Det} \|\pi_{ij}\|}{\text{Det} \|g_{ij}\|},$$

qui est nul sur une hypersphère est identiquement nul sur toute hyperquadrique non développable. Réciproquement, si  $\vartheta_{ijk}$  est nul, en rapportant la surface à ses lignes de courbure, on trouve que l'élément linéaire est

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{du_i^2}{4u_i^3 p(u_i)} \prod_{\lambda \neq i} \frac{u_\lambda - u_i}{u_\lambda}$$

où  $p(u_i)$  est un polynome de degré  $n$  en  $u_i$ , dont le coefficient du terme  $u_i^n$  est  $(-1)^{n-1}$ .

— Les lignes de courbure d'une hyperquadrique  $v_{n-1}$  admettent des surfaces orthogonales à  $(n - 2)$  dimensions qui sont surfaces de niveau de la fonction  $\psi = \sigma^{n+1}/\kappa$  où  $\sigma$  est la courbure principale correspondante et  $\kappa$  le produit des courbures principales. Le long d'une ligne de courbure d'une hyperquadrique la courbure principale correspondante est proportionnelle au cube de chacune des autres courbures et celles-ci sont proportionnelles les unes aux autres. Réciproquement, une hypersurface admettant ces propriétés est une hyperquadrique.

B. Gambier (Paris).

**Bergen, F. van:** Mouvement d'un solide dans un espace riemannien. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 186—187 (1949).

Un movimento in uno spazio riemanniano è detto „solido“ [Th. De Donder, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 28, 8—16 (1942); questo Zbl. 28, 90], se il campo delle velocità soddisfa alla condizione:  $v_{a,b} + v_{b,a} = 0$ . L'A. estende una formula, data da De Donder nel lavoro citato, dal caso in cui il tensore fondamentale  $g_{ab}$  sia costante, al caso di un tensore fondamentale qualunque. La formula di De Donder era:  $\partial^2 v_a / \partial x^b \partial x^c = 0$ ; quella dell'A. è:  $v_{a,b,c} = R_{c,ba}^e v_e$ , essendo  $R_{c,ba}^e$  il tensore di curvatura dello spazio.

V. Dalla Volta (Roma).

**Ruse, H. S.:** On parallel fields of planes in a Riemannian space. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 218—234 (1949).

In uno spazio riemanniano analitico  $V_n$  a tensore fondamentale  $g_{ij}$  (non necessariamente definito) sia dato un campo di  $r$ -ple di vettori  $\lambda_i^\alpha$  ( $i = 1, \dots, n$ ;

$\alpha = 1, \dots, r$ ) linearmente indipendenti, che formano una base per uno spazio vettoriale  $V^r(P)$ , funzione del punto  $P$ ; se, presi due punti qualsiasi di  $V_n$ ,  $P$  e  $Q$ , accade che ogni vettore di  $V^r(P)$  si muti, per trasporto parallelo lungo una curva arbitraria congiungente  $P$  a  $Q$ , in un vettore di  $V^r(Q)$ , diremo che  $V^r$  costituisce un campo di  $r$ -piani paralleli. Se alcuni (eventualmente tutti) dei vettori  $\lambda^i_\alpha$  sono di lunghezza

nulla (isotropi), lo  $r$ -piano si dirà parzialmente (totalmente) nullo, e il numero dei vettori  $\lambda^i_\alpha$  isotropi linearmente indipendenti è la sua nullità. Gli spazi paralleli

parzialmente nulli sono stati recentemente studiati da A. C. Walker (questo Zbl. 33, 131), in un recente lavoro, cui l'A. fa frequente riferimento. Sulla base dei risultati del Walker, l'A. studia diffusamente le  $V_4$ , per le quali sono possibili i seguenti casi: un piano parallelo non nullo; un piano parallelo nullo; un 2-piano non nullo; un 2-piano totalmente nullo; un 2-piano parallelo di nullità 1; altri casi non sono possibili perchè, come è dimostrato dal Walker, a ogni  $r$ -piano parallelo è associato un  $(n-r)$ -piano pure parallelo. Per il caso degli spazi non nulli, il risultato era sostanzialmente noto, come osservato dall'A. (cfr. Eisenhart, Riemannian Geometry; Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Bd. II). Per gli altri, viene assegnata una forma tipica per il  $ds^2$  della  $V_4$ ; inoltre l'esistenza di un 1-piano parallelo porta che vi siano due 2-piani paralleli, aventi a comune l'1-piano; mentre l'esistenza di un 2-piano di nullità uno, implica che vi sia un 1-piano parallelo nullo, asse di un fascio di 2-piani pure di nullità uno, oltre a due 2-piani totalmente nulli. Sono dati anche alcuni cenni sul caso di una  $V_n$  qualsiasi. — L'A. ottiene i suoi risultati servendosi in modo essenziale della nota rappresentazione dei vettori contro- e co-varianti in un punto quali punti e iperpiani di un  $S_{n-1}$  proiettivo. Uno dei tipi di metrica trovati è poi particolare di una forma canonica per una  $V_n$  ammettente un campo di  $r$ -piani parzialmente nulli paralleli, trovata da Walker e non ancora pubblicata.

V. Dalla Volta (Roma).

Graeb, Werner: Geometrische Deutung des Krümmungstensors. Arch. Math., Karlsruhe 2, 148—151 (1950).

Si dà una semplice interpretazione geometrica del tensore di curvatura di una connessione affine, anche non simmetrica; precisamente: Sia  $P$  un punto di una varietà  $X_n$ , a connessione affine, di parametri  $I^v_{\alpha\beta}$  e di tensore di curvatura  $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$  (si suppongono naturalmente i parametri funzioni continue del posto, e dotate di tutte le derivate che occorrono); sia inoltre  $F$  una qualsiasi superficie uscente da  $P$ :  $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$ , e tale che per  $u = v = 0$  si ottenga  $P$ ; si consideri allora, nel piano euclideo  $(u, v)$  una qualsiasi curva di Jordan chiusa,  $C$ , passante per l'origine di equazioni parametriche:  $u = u(t)$ ;  $v = v(t)$ ; ( $0 \leq t \leq l$ );  $u(0) = u(l) = 0$  essendo  $t$  l'ascissa curvilinea, misurata a partire da  $P$  e si dica  $K$  l'immagine di  $C$  sulla  $X_n$ . Sia infine  $\xi^v$  un vettore controvariante nel punto  $P$ , e  $\Delta\xi^v$  la variazione che  $\xi^v$  subisce per spostamento parallelo lungo  $K$  (nel senso delle  $t$  crescenti); se allora l'area della regione (piana) racchiusa da  $C$  è  $f$ , l'A. prova che il limite dell'espressione  $\Delta\xi^v f$ , quando  $K$  tenda a ridursi al punto  $P$ , è dato da  $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \partial x^\beta / \partial x^\alpha \partial u \partial x^\gamma \partial v \xi^\alpha$ . L'A. ottiene il risultato, mediante l'applicazione di un'opportuna disuguaglianza, che dà in limite superiore per l'espressione  $|\xi^v(t) - \xi^v(0)|$ , ( $t$  all'intervallo  $0 \leq t \leq l$ ), e trasformando poi un integrale curvilineo in un integrale superficiale.

V. Dalla Volta (Roma).

Hlavatý, V.: Affine embedding theory II: Frenet formulae. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 714—724; Indag. math., Amsterdam 11, 244—254 (1949).

Hlavatý, V.: Affine embedding theory. III: Integrability conditions. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 977—986 (1949); Indag. math., Amsterdam 12, 279—291 (1950).

Verf. leitet als Fortsetzung seiner interessanten Untersuchungen (siehe dies. Zbl. 33, 397. Leider ist dort ein Druckfehler aufgetreten, statt  $\Delta_{a_2} \dots \Delta_{a_1} T^v_{a_1}$ , hat  $\Delta_{a_2} \dots \Delta_{a_1} T^v_{a_1}$  zu stehen) die Ableitungsgleichungen her. Unter Beibehaltung der

dort verwendeten Bezeichnungen erhält man die Ableitungsgleichungen (Frenet-schen Formeln), falls man auf die Größen  $T_{a_1}^p$  bzw. die durch  $H_{a_x \dots a_2 a_1} = \Delta_{a_x} \dots \Delta_{a_2} T_{a_1}^p$  definierten Größen den invarianten  $D$ -Operator der van der Waerden- und E. Bortolottischen Symbolik anwendet. Der Aufstellung dieser Formeln geht eine ausführliche Diskussion derjenigen Tensoren voraus, die in den Ableitungsgleichungen auftreten. Als Anwendung wird die innere Berührung zweier (maximaler)  $A_m$  des  $A_n$  behandelt. Durch Einführung eines neuen Indexgebietes (von Verf. als „condensed“ Index bezeichnet) können die Frenetschen Formeln in vereinfachter Form dargestellt werden. Ihre Integrabilitätsbedingungen werden dann für diese vereinfachte Darstellung hergeleitet. Als Folgerungen der Einbettungstheorie werden zunächst einige Einbettungsfragen behandelt. Die diesbezüglichen Resultate beziehen sich hauptsächlich auf den Fall, in dem eine (maximale)  $A_m$  nicht in eine  $A_n$  eingebettet werden kann. Endlich werden die äußeren Berührungsinvarianten zweier (maximaler)  $A_m$  des  $A_n$  untersucht. *O. Varga* (Debrecen).

**Varga, O.:** Über das Krümmungsmaß im Finslerschen Räumen. *Publ. math.*, Debrecen **1**, 116—122 (1949).

Für Finslersche Räume hat Berwald [*Math. Z.*, Berlin **25**, 40—73 (1946)] eine zu einem Bivektor in einem Punkte gehörige skalare Krümmung  $B$  definiert, die die natürliche Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungsmaßes bildet. In einem zweidimensionalen Finslerschen Raum hat Finsler (*Diss.* Göttingen 1918) eine Invariante  $S$ , die innere Krümmung, definiert. Die Extremalen, deren Anfangsrichtung in dem oben erwähnten Bivektor liegt, bilden einen zweidimensionalen Finslerschen Raum. Es wird nun bewiesen, daß im betrachteten Punkte  $B = S$ . Dies ist das genaue Analogon des Zusammenhanges zwischen dem Gaußschen und Riemannschen Krümmungsmaß.

*Schouten* (Epe/Holland).

**Frejdina, M. G.:** Duale Systeme, die eine Bewegungsgruppe zulassen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **57**, 547—550 (1947) [Russisch].

Unter „dualen Systemen“ werden 2 Metriken im Raume der Linienelemente  $(x^1, x^2, x^3)$  verstanden, die so aneinander gekoppelt sind, daß die Nulllinien der einen Metrik als geodätische der anderen dienen. Es werden dann ohne ausgeführte Beweise Beispiele für solche dualen Systeme angegeben, bei denen die Metriken inparametrische Gruppen in sich gestatten.

*Bureau* (Hamburg).

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

**Mirguet, Jean:** Sur l'équivalence de la double courbure et de la non-convexité. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 1474—1476 (1949).

L'étude en Géométrie Infinitésimale Directe des propriétés du second ordre d'une surface  $S$  de l'espace euclidien  $R_3$  a fait l'objet de mémoires de H. Busemann et W. Feller [*Acta math.*, Uppsala **66**, 1—47 (1935); *Mat. Tidsskr. B* **1935**, 25—36 et 87—115; **1936**, 41—70; ce Zbl. **12**, 274, **11**, 417, **13**, 179, **15**, 124] dans l'hypothèse où la surface est convexe. L'A. (ce Zbl. **29**, 168 et **33**, 305) a abordé l'extension de la théorie classique sous les hypothèses suivantes:  $S$  est une variété à deux dimensions de  $E_3$  localement lipschitzienne; le paratingent (linéaire) second n'est jamais vide et comprend partout un nombre fini de droites [Remarque du référent: Ces hypothèses sont de nature affine; la seconde ressortit de la théorie de O. Haupt sur les ordres géométriques. Cf. W. Buckel, *J. reine angew. Math.* **185**, 144—191 (1943); ce Zbl. **28**, 312]. Les points (a) sont les points où la surface  $S$  admet un plan d'appui local coïncidant avec le plan du contingent, les points (b) ceux où le paratingent second comprend exactement deux droites; il s'agit d'une transposition des points paraboliques et hyperboliques de la théorie classique. La note est consacrée à la démonstration du théorème suivant: Tout point de  $S$  qui n'est pas limite de points (b), est intérieur à un domaine convexe au sens large. La notion essentielle utilisée est celle de „dépassement“: D'après un résultat antérieur, en un point  $M$  qui n'est



ni (a) ni (b) le contingent est un dièdre ou un plan et il est possible de choisir un plan  $P$  tel que, pour un seul côté de  $P$ , l'ensemble (dit „dépassement“) des points de  $S$ , situés de ce côté de  $P$ , n'admette en  $M$  qu'un nombre fini de demi-tangentes. Un tel plan  $P$  qui est soit le plan tangent, soit un plan contenant l'arête du contingent est appelé „plan de dépassement“.

Chr. Pauc (Le Cap).

**Mirguet, Jean:** Sur une généralisation des orthosurfaces. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 48—50 (1950).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung des Begriffes der Orthoflächen [vgl. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 51, 224 (1934); dies. Zbl. 10, 219], unter welche auch Flächen fallen, die nicht Vereinigungen von Orthoflächen sind, deren Kontingents sich aber gleichwohl überall entweder auf (höchstens) zwei Ebenen oder auf einen konvexen Doppelkegel reduziert. Nach Angabe des Verf. ergibt sich so die Möglichkeit zu einer direkten Analyse der „Singularitäten“ von Flächen und von Anwendungen auf die Theorie der Einhüllenden. Die etwas komplizierte Definition solcher Flächen  $F$  lautet: (A) Zu jedem Punkt  $P \in F$  existiert eine Gerade  $g(P)$  durch  $P$  derart, daß zu jeder Umgebung  $U$  von  $P$  ein (gerader Kreis-)Zylinder mit  $g(P)$  als Achse gehört, dessen sämtliche Erzeugende je mindestens einen Punkt von  $UF$  enthalten. — (B) Ist eine durch  $P$  gehende Gerade  $h$  nicht Paratingente an  $F$  in  $P$  von höherem Rang als 1 und ist  $H$  eine von  $h$  begrenzte Halbebene, dann soll für jede zu  $h$  parallele, innerhalb  $H$  gelegene, zu  $h$  hinreichend benachbarte Gerade  $h'$  die Anzahl der Punkte von  $h'F$  unabhängig von  $h'$ , also  $n(H)$ , und höchstens gleich 2 sein. — (C) Überdies soll für irgend zwei derartige Halbebenen  $H', H''$ , ausgenommen eine endliche Anzahl dieser  $H$ , stets  $n(H') \equiv n(H'') \equiv i(P, h) \pmod{2}$  sein, wobei  $i(P, h) = 0$  oder  $= 1$ . Weiter wird gefordert, daß in jedem Punkt von  $F$  der offene Kern des Paratingents vom Rang höher als 1 leer ist, ferner, daß in jedem Punkte  $P \in F$  gilt:  $i(P, h_1) = i(P, h_2)$  für irgend zwei Geraden  $h_1, h_2$  durch  $P$ , welche nicht Paratingenten an  $F$  in  $P$  von höherem Rang als 1 sind, ausgenommen eine Teilmenge solcher Geraden  $H$  mit leerem offenem Kern. Ist eine „Regulatrix“  $g(P)$  nicht Paratingente in  $P$  an  $F$ , so ist  $F$  in  $P$  Orthofläche. Wegen weiterer Bemerkungen sei auf die Note selbst verwiesen.

Haupt (Erlangen).

**Loomis, L. H. and H. Whitney:** An inequality related to the isoperimetric inequality. Bull. Amer. math. Soc. 55, 961—962 (1949).

Verff. geben einen sehr kurzen Beweis der folgenden Aussage: Ist  $M$  das  $n$ -dimensionale Maß einer offenen Menge  $A$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes und  $M_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) die  $(n-1)$ -dimensionalen Maße der Orthogonalprojektionen von  $A$  auf die  $n$  Koordinatenebenen, so gilt  $M^{n-1} \leq M_1 M_2 \dots M_n$ . Hieraus folgt die „isoperimetrische Ungleichung“:  $M^{n-1} \leq 2^{-n} S^n$ , wobei  $S$  ein normales Oberflächenmaß von  $A$  bezeichnet.

H. Hadwiger (Bern).

**Hadwiger, H.:** Elementare Ermittlung extremer Rotationskörper. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 59—70 (1949).

Mit Hilfe elementarer Betrachtungen werden eine Anzahl interessanter Extremalprobleme für konvexe Rotationskörper des gewöhnlichen Raumes aufgestellt und gelöst. Die zulässigen Körperklassen werden je nach dem Radius  $a$  und dem Radius  $b$  des maximalen bzw. minimalen Breitenkreises klassifiziert. So weisen z. B. unter allen Körpern mit festem  $a$  und gegebenem Volumen  $V$  und  $b \geq b_0$  (je nach dem Wert von  $V$ ) die symmetrischen abgestumpften Kugelzylinder oder die symmetrischen abgestumpften Kugellinsen das Minimum der Oberfläche auf.

Dinghas.

**Busemann, Herbert:** On the problem of Dido. Studies Essays, pres. to R. Courant, 63—73 (1948).

Es sei  $C$  eine einfach geschlossene Kurve  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  der Ebene. Die  $F$ -Länge  $L(C)$  von  $C$  ist durch  $\int F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$  gegeben, wobei  $F$  eine stetige Funktion der vier Variablen ist, die in  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  homogen vom Grade 1, für  $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$  positiv, und endlich noch orientierungsinvariant, so daß  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F(x, y, -\dot{x}, -\dot{y})$  gilt, vorausgesetzt wird. — Der

$m$ -Flächeninhalt  $M(C)$  des von  $C$  umschlossenen beschränkten Bereiches  $B(C)$  ist durch  $\int m(x, y) dx dy$  erklärt, wobei  $m$  eine über jedem solchen Bereich  $B$  summable positive Funktion bezeichnet. — Das vom Verf. behandelte Problem von Dido besteht darin, bei festem  $F$  und  $m$  zu einer vorgegebenen  $F$ -Länge  $L$  diejenige Kurve  $K$  zu finden, für die  $L(K) = L$  ist und  $M(K)$  den maximalen Wert annimmt. Ein erster wichtiger Satz I (Konvexitätsprinzip) sagt aus, daß die Lösung  $K$  geodätisch konvex ist, d. h.  $B(K)$  enthält mit zwei Punkten stets auch den verbindenden Kurvenbogen minimaler  $F$ -Länge. Diese Tatsache gestattet es, über die Lösung verschiedene weitergehende Feststellungen (Differenzierbarkeits- und Tangenteneigenschaften usw.) abzuleiten. — Ist  $F$  nicht von  $x$  und  $y$  abhängig — Verf. ersetzt in diesem Fall  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  durch  $x$  und  $y$  und schreibt demnach  $F(x, y)$  an Stelle von  $F(\dot{x}, \dot{y})$  —, so handelt es sich um ein verallgemeinertes isoperimetrisches Problem in der Minkowskischen Ebene. Die Eichkurve  $H$  der Minkowskischen Metrik, deren Gleichung  $F(x, y) = 1$  lautet, umschließt einen Bereich mit Mittelpunkt  $O$ . — Ein zweiter Satz II (Regularitätsprinzip) besagt, daß die Lösung  $K$  bezüglich des Problems von Dido für  $F, m$  und  $L$  mit der Lösung  $K^*$  für  $F^*, m$  und  $L$  zusammenfällt, falls der Eichbereich  $H$  ( $F = 1$ ) die konvexe Hülle des nicht notwendig konvexen Eichbereiches  $H^*$  ( $F^* = 1$ ) ist. — Eine einfache Konsequenz von I ist z. B. die folgende Aussage: Ist  $H$  ein konvexes Polygon mit den Ecken  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und dem Mittelpunkt  $O$ , dann ist die Lösung  $K$  des Problems von Dido für jedes  $m$  und  $L$  ebenfalls ein konvexes Polygon mit den Ecken  $q_i$ , dessen Seiten  $q_{i-1}q_i$  zu den Radien  $p_iO$  von  $H$  parallel sind. Durch eine elementare Variation wird noch die rekursive Relation

$$\frac{\mu(q_i q_{i+1}) \sin \beta_i \sin \beta_{i+1}}{\varrho_i \sin \beta_{i+1} - \varrho_{i+1} \sin(\beta_i + \beta_{i+1}) + \varrho_{i+2} \sin \beta_i} = c$$

abgeleitet, wobei  $c$  eine (von  $i$  unabhängige) Konstante,  $\beta_i$  den Winkel  $p_i O p_{i+1}$  bezeichnen,  $\varrho_i = F(p_i)$  und  $\mu(q_i q_{i+1})$  das  $m$ -Integral längs der betreffenden Seite ist. Verschiedene Folgerungen, z. B. für Fälle regulärer Polygone, sind hieraus ableitbar. Ein Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  führt zu der folgenden Feststellung: Sind  $K$  und  $K^*$  Lösungen des Problems von Dido bezüglich  $F, m$  und  $F^* = F, m^* = 1$ , und sind  $R(\theta)$  und  $R^*(\theta)$  die Krümmungsradien von  $K$  und  $K^*$  in den Punkten  $P$  und  $P^*$  mit paralleler orientierter Tangente der Richtung  $\theta$ , so gilt  $m(\theta) R(\theta) = k m^*(\theta) R^*(\theta)$ , wobei  $m(\theta)$  und  $m^*(\theta)$  die  $m$ -Werte in  $P$  und  $P^*$  bezeichnen. — Das Brunn-Minkowskische Theorem im Falle des gewöhnlichen isoperimetrischen Problems ( $m = 1$ ) in der Minkowskischen Ebene wird noch hergeleitet; hierüber ist eine besondere Arbeit des Verf. erschienen (dies. Zbl. 34, 252). — Einige Bemerkungen über die  $n$ -dimensionalen Verallgemeinerungen beschließen die Arbeit.

H. Hadwiger (Bern).

Aezél, John and Ladislas Fuchs: A minimum-problem on areas of inscribed and circumscribed polygons of a circle. *Compositio math.*, Groningen 8, 61—67 (1950).

$P$  sei ein dem Einheitskreis  $K$  einbeschriebenes konvexes Polygon, das den Mittelpunkt von  $K$  enthält, und  $P'$  ein umbeschriebenes Polygon, dessen Berührungspunkte mit  $K$  durch die Eckpunkte von  $P$  gegeben sind. Einer Anregung von P. Szász folgend, fragen die Verff. nach dem absoluten Minimum  $T_0$  der Summe der Flächeninhalte von  $P$  und  $P'$ . Bezeichnen die  $\alpha_v$  die halben Zentriwinkel der Seiten von  $P$ , so stellt sich die Frage nach dem Minimum von  $\sum_1^n f(\alpha_v)$  unter den

Nebenbedingungen  $\sum_1^n \alpha_v = \pi$  und  $0 \leq \alpha_v \leq \pi/2$ , wobei  $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha)$  ist. Elementare Diskussion unter geeigneter Verwendung geläufiger Ungleichungen (Jensen; Hardy-Littlewood-Pólya) führt zum Ergebnis, daß  $T_0 = 6$  ist, eine extremale Flächensumme, die durch Quadrate realisiert wird. H. Hadwiger.

Besicovitch, A. S.: Measure of asymmetry of convex curves. *J. London math. Soc.* 23, 237—240 (1949).

Verf. beweist: Ein ebener konvexer Bereich  $I'$  vom Flächeninhalt  $F$  enthält einen konvexen Teilbereich  $I''$  mit Mittelpunkt, so daß  $F' \geq \frac{2}{3} F$  ausfällt; andererseits ist  $I'$  in einem (nicht notwendig konvexen) Bereich  $I'''$  mit Mittelpunkt enthalten, wobei  $F'' \leq \frac{3}{4} F$  gilt. Die angegebenen Schranken für die Flächenverhältnisse sind genau; das Gleichheitszeichen gilt, wenn  $I'$  ein Dreieck ist. [Ref. bemerkt noch, daß in der zweiten Aussage  $\frac{3}{4}$  durch  $\frac{3}{2}$  ersetzt werden muß, falls zusätzlich verlangt ist, daß  $I'''$  ebenfalls konvex sei. Diese Ergebnisse hängen aufs engste mit solchen zusammen, die bezüglich der Probleme der dichtesten Lagerung bzw. der

dünnsten Überdeckung der Ebene durch beliebige konvexe Bereiche erzielt worden sind; vgl. L. Fejes-Tóth, On the densest packing of convex domains. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 544—547 (1948); insbesondere Bemerkung Fußnote 7) und S. 546 oben.]

H. Hadwiger (Bern).

## Topologie:

Seitz, Jiří: On a problem of E. Čech. Časopis Mat. Fys., Praha 73, 43—44 und engl. Zusammenfassg. 44 (1950) [Tschechisch].

By general topology of a space  $P$  we mean a set-function  $u$  defined for  $S \subset P$  and such that  $u\emptyset = \emptyset$ ,  $S \subset P \Rightarrow S \subset uS \subset P$ ,  $S_1 \subset S_2 \subset P \Rightarrow uS_1 \subset uS_2$ . As an answer to a question put by Čech, the following two properties of a general topology are proved to be equivalent to each other. Property  $\alpha$ : Given a set  $M \subset P$  and a point  $a \in uM - M$ , there exists a set  $S \subset M$  such that  $uS = S + (a)$ . Property  $\beta$ : For any general topology  $v$  in  $P$  such that  $S \subset P \Rightarrow vS \subset uS$ ,  $vS = S \subset P \Rightarrow uS = S$  we have  $uS = vS$  for every  $S \subset P$ .

Autoreferat.

Arěškin, G. Ja.: Über die stetigen Abbildungen kompakter Räume. Mat. Sbornik, n. S. 24 (66), 493—499 (1949) [Russisch].

Das System  $\{U\}$  der offenen Mengen  $U$  sei eine Basis des topologischen Raumes  $R$  mit der Eigenschaft, daß mit  $U_1$  und  $U_2$  auch  $U_1 \dot{+} U_2$  Element von  $\{U\}$  ist. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Satz: Notwendig und hinreichend für die Homöomorphie zweier Kompakta  $X$  und  $Y$  ist die Existenz einer Abbildung  $V = \varphi(U)$  irgendeiner Basis  $\{U\}$  des Raumes  $X$  auf irgendeine Basis  $\{V\}$  des Raumes  $Y$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllt: I. Wenn  $V_i = \varphi(U_i)$ ,  $i = 1, 2$ , ist, so gilt  $V_1 \dot{+} V_2 = \varphi(U_1 \dot{+} U_2)$ . II. Es ist dann und nur dann  $V = Y$ , wenn  $U = X$  ist. — Ist  $y = f(x)$  eine topologische Abbildung des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$ , so wird diese Beziehung zwischen den Basissystemen von  $X$  und  $Y$  durch die Formel  $f(U) = \varphi(U)$ ,  $U \in \{U\}$  gegeben. Umgekehrt bestimmt jede Funktion  $\varphi$ , welche die Bedingungen I und II erfüllt, gemäß dieser Formel eine topologische Abbildung von  $X$  auf  $Y$ . In dem zitierten Satz können die Basissysteme  $\{U\}$  bzw.  $\{V\}$  durch die Systeme der abgeschlossenen Komplementärmengen  $\{X - U\} = \{P\}$  bzw.  $\{Y - V\} = \{F\}$  ersetzt werden. An die Stelle der Bedingungen I und II treten dann: I'. Wenn  $F_i = \varphi(P_i)$  ( $i = 1, 2$ ) ist, so gilt:  $F_1 \cdot F_2 = \varphi(P_1 \cdot P_2)$ . II'.  $F = 0$ , gilt dann und nur dann, wenn  $P = 0$  ist. — Die Systeme  $\{U\}$  und  $\{V\}$  bzw.  $\{P\}$  und  $\{F\}$  werden als algebraische Strukturen aufgefaßt, in denen die algebraischen Operationen „Vereinigung“ bzw. „Durchschnitt“ definiert sind und die in bezug auf diese Operationen abgeschlossen sind. Für die Homöomorphie zweier Kompakta ist die Isomorphie ihrer Strukturen  $\{U\}$  oder  $\{P\}$  notwendig und hinreichend. Zum Gegenstand der Arbeit vgl. auch die Arbeiten desselben Verf.: dies. Zbl. 33, 23—24.

Thimm (Bonn).

Vajnštejn, I. A.: Über ein Problem von P. S. Alexandroff. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 57, 431—434 (1947) [Russisch].

$f$  sei eine stetige Abbildung des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$ . 1.  $f$  heißt abgeschlossen, wenn das Bild jeder in  $X$  abgeschlossenen Menge abgeschlossen in  $Y$  ist. — 2.  $f$  heißt nulldimensional (bzw. von endlicher Vielfachheit), wenn das Urbild  $f^{-1}(y)$  jedes Punktes  $y$  aus  $Y$  nulldimensional (bzw. eine endliche Menge) ist. — 3.  $f$  heißt „nicht zusammenführend“, wenn für eine beliebige abgeschlossene Menge  $F$  aus  $X$  aus  $f(F) = Y$  folgt  $F = X$ . — Die im folgenden erwähnten Räume seien metrisch mit abzählbarer Basis. Von Alexandroff stammt folgendes Problem: Es sei  $f$  eine stetige dimensionserhöhende Abbildung des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$ . Ist  $f$  Produkt zweier stetiger Abbildungen, von denen die eine die Dimension nicht erhöht und die andere von endlicher Vielfachheit (und dimensionserhöhend) ist? Ohne weitere Voraussetzungen über  $f$ ,  $X$  und  $Y$  ist die Frage verneinend zu beantworten. Es genügt auch nicht, vorauszusetzen, daß  $f$  nicht zusammenführend oder nulldimensional sei. Aus einer Lösung des Problems für beliebige Abbildungen des  $p$ -dimensionalen Würfels  $I_p$  auf den  $q$ -dimensionalen Würfel  $I_q$  ( $p < q$ ) würde die Lösung des bekannten Problems über die Unmöglichkeit der offenen Abbildung von  $I_p$  auf  $I_q$  folgen. Verf. beweist folgenden Satz: Es sei  $f$  eine nicht zusammenführende Abbildung des 0-dimensionalen Raumes  $X$  auf den  $n$ -dimensionalen Raum  $Y$ ,



der folgende Bedingung erfüllt: Jede abgeschlossene, in  $Y$  nirgendsdichte Teilmenge von  $Y$  besitzt eine niedrigere Dimension als  $Y$ . Dann gibt es einen Raum  $Z$  und eine (nicht zusammenführende) Abbildung  $\varphi$  des Raumes  $X$  auf den Raum  $Z$ ; ferner läßt sich  $Z$  durch eine Abbildung  $\psi$  von endlicher Vielfachheit auf  $Y$  abbilden. Es ist außerdem  $\dim Z \leq n-1$ .

Thimm (Bonn).

**Keldyš, Ljudmila: Stetige Abbildungen des Intervalls auf den  $n$ -dimensionalen Würfel.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 327—330 (1949) [Russisch].

Vgl. vorsteh. Referat. — 1. Die stetige Abbildung  $\psi$  des Kompaktums  $X$  heißt „gleichmäßig nicht dimensionserhöhend“, wenn für jede offene Teilmenge  $V$  von  $X$  gilt:  $\dim \psi(V) \leq \dim V$  ( $V =$  abgeschlossene Hülle von  $V$ ). 2. Die stetige Abbildung  $Y = \varphi(X)$  heißt zweiwertig, wenn das Urbild  $\varphi^{-1}(y)$  eines beliebigen Punktes  $y$  von  $Y$  höchstens zwei Punkte enthält. Bewiesen werden die beiden folgenden Sätze: *Satz 1:* Jede nicht zusammenführende Abbildung (vgl. vorstehendes Referat)  $C_n = f(I)$  des Intervalles auf den  $n$ -dimensionalen Würfel kann als Produkt von  $2n-2$  stetigen Abbildungen:  $f = \varphi_{n-1}\varphi_{n-1} \cdots \varphi_1\varphi_1$  gewonnen werden, wobei jede Abbildung  $\varphi_i$  eine nulldimensionale, gleichmäßig nicht dimensionserhöhende Abbildung ist und jede Abbildung  $\varphi_i$  zweiwertig ist und die Dimension um 1 erhöht. *Satz 2:* Es sei  $C_n = \tilde{f}(I)$  eine (zusammenführende) Abbildung des Intervalles auf den  $n$ -dimensionalen Würfel. Jedes Teilintervall  $\delta \subset I$  habe ein Bild  $f(\delta)$  mit  $\dim f(\delta) = n$ . Dann kann  $\tilde{f}$  als Produkt von  $2n-1$  stetigen Abbildungen gewonnen werden:  $\tilde{f} = \varphi_n\varphi_{n-1}\varphi_{n-1} \cdots \varphi_1\varphi_1$ , wobei die  $\varphi_i$  und  $\varphi_i$  von der gleichen Art wie im Satz 1 sind.

Thimm (Bonn).

**Keldyš, Ljudmila: Nulldimensionale Abbildungen eines endlich-dimensionalen Kompaktums.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 989—992 (1949) [Russisch].

Vgl. die beiden vorsteh. Referate. — Im folgenden sollen alle Räume metrisch, separabel und kompakt sein. Die stetige Abbildung  $f(X)$  besitze die Eigenschaft  $(\gamma)$ , wenn es für eine beliebige in  $X$  offene Teilmenge  $V$  mit  $\dim X < \dim f(V) = k$  und für jede ganze Zahl  $i$  mit  $\dim X < i \leq k$  in  $V$  eine perfekte Menge  $Q_i^V$  gibt, derart daß  $\dim f(Q_i^V) = i$  und  $\dim \{f(Q_i^V \cdot \delta')\} \leq i-1$  gelten; dabei sind  $\delta$  und  $\delta'$  abgeschlossene Hüllen von in  $X$  offenen Mengen;  $\delta$  und  $\delta'$  sollen ferner punktfremd sein. —  $M_f$  sei die Menge der mehrfachen Punkte der stetigen Abbildung  $Y = f(X)$ , d. h. die Menge der Punkte von  $Y$ , die mehr als ein Urbild haben. Verf. beweist: *Satz 1:* Es sei  $f$  eine nulldimensionale Abbildung des  $n$ -dimensionalen Kompaktums  $X$  auf das Kompaktum  $Y$  der Dimension  $m > n$ , welche die Eigenschaft  $(\gamma)$  besitzt. Wenn  $\dim M_f = m-1$  ist, so kann  $f$  als Produkt zweier stetiger Abbildungen  $f = \varphi \Phi$  erhalten werden, wobei  $\varphi$  zweiwertig ist und  $\Phi$  die Eigenschaft  $(\gamma)$  besitzt und  $\dim \Phi(X) = m-1$  gilt. *Satz 2:* Voraussetzungen über  $f$  wie bei Satz 1; nur  $\dim M_f = m-1$  werde nicht vorausgesetzt. Dann ist  $f$  Produkt zweier stetiger Abbildungen  $f = \psi f_1$ , wobei  $\psi$  nulldimensional und gleichmäßig nicht dimensionserhöhend ist;  $f_1$  besitzt die Eigenschaft  $(\gamma)$ , und es ist  $\dim M_{f_1} = m-1$ . Aus den Sätzen 1 und 2 werden u. a. folgende Folgerungen gezogen: 1. Die nulldimensionale stetige Abbildung des  $n$ -dimensionalen Kompaktums  $X$  auf das  $n+k$ -dimensionale Kompaktum  $Y$ , welche die Eigenschaft  $(\gamma)$  besitzt, ist Produkt von  $2k$  stetigen Abbildungen (1)  $f = \varphi_k\varphi_k \cdots \varphi_1\varphi_1$ , wenn  $\dim M_f = n+k-1$  ist und von  $2k+1$  stetigen Abbildungen (2)  $f = \varphi_{k+1}\varphi_k\varphi_k \cdots \varphi_1\varphi_1$ , wenn  $\dim M_f = n+k$  ist. Dabei sind alle Abbildungen  $\varphi_i$  nulldimensional und gleichmäßig nicht dimensionserhöhend; jede Abbildung  $\varphi_i$  ist zweiwertig und erhöht die Dimension um 1. 2. Die nicht zusammenführende, nulldimensionale Abbildung des  $n$ -dimensionalen Kompaktums auf den  $n+k$ -dimensionalen Würfel läßt sich in der Form (1) darstellen. 3. Es sei  $f$  eine (zusammenführende) nulldimensionale Abbildung des  $n$ -dimensionalen Kompaktums  $X$  auf den  $n+k$ -dimensionalen Würfel, derart, daß für die abgeschlossene Hülle  $\delta$  einer beliebigen in  $X$  offenen Menge gilt:  $\dim f(\delta) = n+k$ . a) Dann ist  $f$  in der Form (2) darstellbar. b) Es ist  $f = f_1$ , wobei  $\psi$  nulldimensional und gleichmäßig nicht dimensionserhöhend ist.  $f_1$  ist nicht zusammenführend und  $\dim M_{f_1} = n+k-1$ .

Thimm (Bonn).

**Vajnštejn, I. A.: Über dimensionserhöhende Abbildungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 9—12 (1949) [Russisch].

Es sei  $f$  eine Abbildung des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$  ( $X$  und  $Y$  metrische Räume mit abzählbarer Basis). Die Vielfachheit des Punktes  $y \in Y$  ist die Mächtigkeit der Menge  $f^{-1}(y)$  und werde mit  $\mu(y)$  bezeichnet.  $Y_k$  sei die Menge aller Punkte  $y$  mit  $\mu(y) \geq k$ . Die Teilmenge  $L$  von  $f^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$ , werde regelmäßig genannt, wenn das Bild jeder offenen Menge  $U \supset L$  den Punkt  $y$  als inneren Punkt enthält. Die Ordnung des Punktes  $y \in Y$  ist die kleinste ganze Zahl  $k$  mit der Eigenschaft, daß  $k$  beliebige Punkte aus  $f^{-1}(y)$  eine regelmäßige Menge bilden. Wenn eine solche Zahl  $k$  nicht existiert, heiße der Punkt  $y$  von unendlicher Ordnung. Die Ordnung von  $y$  werde mit  $\nu(y)$  bezeichnet.  $Y'_k$  sei die Menge aller Punkte  $y$  mit  $\nu(y) \geq k$ . Die Abbildung  $f$  besitze die Eigenschaft  $A$ , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt: 1.  $f$  ist nulldimensional, 2.  $y$  sei ein beliebiger Punkt von  $Y$ ; wenn das Urbild  $f^{-1}(y)$  nirgendsdicht in  $X$  ist, enthalte

es wenigstens einen isolierten Punkt. — *Satz 1:* Es sei  $f$  eine abgeschlossene Abbildung von  $X$  auf  $Y$ , mit der Eigenschaft  $A$ . Dann folgt für beliebiges  $k$  aus  $\dim Y'_k > \dim X$ , daß  $\dim Y'_{k+1} > \dim Y'_k - 1$  ist. — *Satz 2:* Voraussetzungen über  $f$  wie in Satz 1. Es sei  $\dim Y = \dim X + n$ . Dann gilt für  $k \leq n + 1$ :  $\dim Y'_k \geq \dim Y - k + 1$ . — *Satz 3:* Voraussetzungen über  $f$  wie in Satz 1.  $f$  sei von endlicher Ordnung und  $\dim Y = \dim X + n$ . Dann besitzt  $v(y)$  mindestens  $n + 1$  verschiedene Werte. — *Satz 4:* Voraussetzungen über  $f$  wie in Satz 3.  $\dim Y = \dim X + n$ . Es sei  $V_k$  die  $k$ . Zahl, wenn die Werte  $v(y)$  ihrer Größe nach geordnet werden, und es sei  $k \leq n + 1$ . Dann gilt:  $\dim Y'_k \geq \dim Y - k + 1$ . — Die Abbildung  $f$  heiße von abzählbarer Vielfachheit, wenn für einen beliebigen Punkt  $y \in Y$   $f^{-1}(y)$  höchstens abzählbar ist. Wenn eine solche Abbildung abgeschlossen ist, erfüllt sie Bedingung  $A$ . Es sei  $f$  eine Abbildung von abzählbarer Vielfachheit;  $\dim Y = \dim X + n$ . Dann ist  $Y'_{n+1}$  nicht leer. — Für offene Abbildungen gilt folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff: Es sei  $f$  eine offene und abgeschlossene Abbildung von abzählbarer Vielfachheit. Dann ist  $\dim Y = \dim X$ . Thimm (Bonn).

**Každan, Ja. M.: Über stetige, dimensionserhöhende Abbildungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 19—22 (1949) [Russisch].

Über die Bezeichnungen vgl. vorsteh. Referat. — *Satz 1:* Es sei  $f$  eine stetige Abbildung des  $F_\sigma$ -Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$ . Es sei  $\dim Y = \dim X + n$ . Wenn das Urbild  $f^{-1}(y)$  jedes Punktes  $y \in Y$ , dessen Vielfachheit  $\geq n$  ist, wenigstens  $n$  isolierte Punkte enthält, so gibt es im Raum  $Y$  mindestens einen Punkt  $y$ , dessen Ordnung  $\geq n + 1$  ist. — Der Raum  $X$  besitze die Eigenschaft  $(\alpha)$ , wenn jede in ihm nirgendsdichte Menge eine kleinere Dimension als  $X$  hat. — *Satz 2:* Es sei  $X$  ein  $F_\sigma$ -Raum mit der Eigenschaft  $(\alpha)$  und  $f$  eine stetige Abbildung von  $X$  auf  $Y$ .  $\dim Y = \dim X + n$ . In dem Urbild  $f^{-1}(y)$  jedes Punktes  $y \in Y$ , dessen Vielfachheit  $\mu(y) \geq n + 1$  ist, gebe es  $n + 1$  isolierte Punkte. Dann existiert ein Punkt  $y^* \in Y$ , dessen Ordnung  $> n + 2$  ist. — In Satz 2 ist die Bedingung  $(\alpha)$  wesentlich. *Satz 3:* Wenn  $f$  eine stetige Abbildung des nulldimensionalen Kompaktums  $X$  auf den  $n$ -dimensionalen Würfel  $I_n$  ist, so gibt es in  $I_n$  wenigstens einen Punkt mit einer Ordnung  $\geq n + 1$ . *Satz 4:* Es sei  $f$  eine stetige Abbildung des eindimensionalen Kompaktums  $X$  auf den  $n$ -dimensionalen Würfel  $I_n$ ,  $X$  besitze die Eigenschaft  $(\alpha)$ . Dann gibt es in  $I_n$  einen Punkt der Ordnung  $\geq n + 1$ . — Nach Urysohn besitzt der Punkt  $p$  bezüglich des Raumes  $X$  den Index  $\text{ind}_p X \leq \alpha$ , wenn es in beliebiger Umgebung des Punktes  $p$  eine Umgebung gibt, deren Rand eine Mächtigkeit  $\leq \alpha$  besitzt. *Satz 5:* Für jeden Punkt  $x$  des Kompaktums  $L$  gelte  $\text{ind}_x L \leq \aleph_0$ .  $f$  sei eine stetige Abbildung von  $L$  auf den  $n$ -dimensionalen Würfel  $I_n$ . Dann gibt es Punkte, deren Ordnung  $\geq n$  ist. Thimm (Bonn).

**Lunc, A.: Ein Bikompaktum, dessen induktive Dimension größer ist als die mit Hilfe von Bedeckungen bestimmte Dimension.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 801—803 (1949) [Russisch].

Für separable metrische Räume fallen die Menger-Urysohnsche Dimension ( $\text{ind } R$ ) und die mittels der Ordnung einer hinreichend feinen abgeschlossenen Überdeckung bestimmte Dimension ( $\dim R$ ) zusammen. Verf. konstruiert ein Beispiel eines Bikompaktums mit  $\text{ind } R = 2$  und  $\dim R = 1$ , welches wohl das erste Beispiel dieser Art ist. Die sehr komplizierte Konstruktion benutzt z. B. eine Wohlordnung der Punkte des Einheitsquadrates; sie kann hier nicht — auch nicht andeutungsweise — beschrieben werden. In der späteren Abhandlung von O. V. Lokucievskij, dies. Zbl. 33, 23, ist ein einfacheres Beispiel eines Bikompaktums mit  $\dim R \neq \text{ind } R$  angegeben worden. Thimm (Bonn).

**Boltjanskij, V.: Ein Beispiel eines zweidimensionalen Kompaktums, dessen topologisches Quadrat die Dimension drei hat.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 597—599 (1949) [Russisch].

$p$  sei eine fest gewählte Primzahl.  $K$  sei ein Kreisring. Wir identifizieren alle diejenigen Punkte des Randkreises  $\alpha$  von  $K$ , die  $\alpha$  in  $p$  gleiche Bögen teilen, und wir identifizieren alle diejenigen Punkte des Randkreises  $\beta$  von  $K$ , die  $\beta$  in  $p^k$  ( $k \geq 1$ ) gleiche Bögen teilen. Dadurch entstehe aus  $K$  das Polyeder  $\Pi_k$ , das Blatt der Stufe  $k$  genannt werde. Seine Ränder, die durch die beschriebene Konstruktion aus  $\alpha$  bzw.  $\beta$  entstehen, seien  $a$  bzw.  $b$ . Es sei  $K^2$  ein beliebiges 2-dimensionales Polyeder. Aus einem Dreieck von  $K^2$  schneiden wir ein kreisförmiges Loch  $\Sigma$ , mit dem Rande  $c$  heraus und identifizieren  $c$  mit der Randkurve  $a$  eines Blattes  $\Pi_p$ . Wir sagen dann: Das Loch  $\Sigma$  ist mit dem Blatt  $\Pi_k$  verklebt worden. Durch wiederholte Anwendung dieser Operation entstehen die „Türme“  $\Pi_{k,i}$ : Im Blatt  $\Pi_k$  wird ein Loch  $\Sigma$  ausgeschnitten, das die Ränder von  $\Pi_k$  nicht trifft;  $\Sigma$  wird mit einem Blatt  $\Pi_{k+1}$  verklebt. In  $\Pi_{k+1}$  wird ein Loch geschnitten und mit einem Blatt  $\Pi_{k+2}$  verklebt usw., endlich wird ein Loch in  $\Pi_{i-1}$  durch ein Blatt  $\Pi_i$  verklebt. Es ist  $\Pi_{k,k} = \Pi_k$ . Es sei  $S^2$  eine triangulierte 2-dimensionale Sphäre. In jedes Dreieck von  $S^2$  schneiden wir ein Loch und verkleben es mit einem Blatt  $\Pi_k$ . So entstehe das



Polyeder  $P_{k,k}$ . Nun sei das Polyeder  $P_{k,l}$  ( $l \geq k$ ) bereits konstruiert. Wir geben die Konstruktion von  $P_{k,l+1}$  an. In jedes Dreieck von  $P_{k,l}$  (nach Triangulierung) schneiden wir ein Loch. Die Löcher in der Sphäre  $S^2$  werden mit  $(k, l+1)$ -Türmen verklebt und die Löcher in einem Blatt  $\Pi_i$  der  $i$ . Stufe ( $i \geq k$ ) werden mit  $(i+1, l+1)$ -Türmen verklebt. Alle beschriebenen Konstruktionen lassen sich ohne Durchdringungen im  $R_4$  ausführen. Die Folge der Polyeder  $P_{k,n}$  strebt mit  $n \rightarrow \infty$  gegen ein Polyeder  $P_k$ , das ein Kompaktum ist, wenn noch vorausgesetzt wird, daß die Durchmesser der Dreiecke, welche durch die Triangulierung der angeklebten Türme entstehen, mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null streben. Verf. beweist:  $\dim P_k = 2$ ,  $\dim (P_k \times P_k) = 3$ . Thimm (Bonn).

**Giever, John B.:** On the equivalence of two singular homology theories. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 178—191 (1950).

Die singuläre (Ko-)Homologietheorie ist von Eilenberg [Ann. Math., Princeton, II. S. 45, 407 (1944)] neu begründet worden. Hurewicz, Dugundji und Dowker (dies. Zbl. 31, 283) haben eine neue singuläre (Ko-)Homologietheorie eingeführt, die auf der Theorie der Limesgruppen eines Gruppenspektrums beruht. Verf. zeigt, daß beide Theorien isomorphe Gruppen liefern. Hierzu wird der Eilenbergsche singuläre Komplex  $S(X)$  des topologischen Raumes  $X$  in einfacher Weise durch ein Polyeder  $P$  geometrisch repräsentiert, dessen (simpliciale) Kohomologiegruppen sowohl mit den Eilenbergschen als auch mit den Hurewiczschen Kohomologiegruppen von  $X$  übereinstimmen, wenn die in die Definition der letzteren eingehende Kardinalzahl  $\aleph > \mathfrak{C}^\alpha$  ist, wobei  $\mathfrak{C}$  die Mächtigkeit der Menge der Punkte von  $X$  und  $\alpha_0$  die abzählbare Mächtigkeit bedeutet. Für die Eilenbergschen Gruppen ist dies leicht zu sehen. Für die Hurewiczschen folgt es daraus, daß die Menge der Ecken von  $P$  eine Mächtigkeit  $< \aleph$  hat und  $\bar{P}$  selbst in natürlicher Weise eine stetige Abbildung in  $X$  zuläßt. Dann kommt also die Kohomologiegruppe  $H^n(P, G)$  in dem Spektrum vor, mittels dessen die Hurewiczsche Kohomologiegruppe  $\mathfrak{H}^n(X, G, \aleph)$  definiert ist. Der Isomorphismus beider Gruppen wird geliefert, indem man jedem Element der Limesgruppe  $\mathfrak{H}^n(X, G, \aleph)$  seine Komponente in  $H^n(P, G)$  zuordnet. Für die Eilenbergschen und Hurewiczschen Homologiegruppen von  $X$  folgt dann die Isomorphie aus dem Dualitätssatz. — Auch die Homotopiegruppen von  $P$  sind mit denen von  $X$  isomorph. Burger (Frankfurt a. M.).

**Dowker, C. H.:** Čech cohomology theory and the axioms. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 278—292 (1950).

La théorie classique de cohomologie de Čech, fondée sur des recouvrements finis, ne satisfait pas, lorsque l'espace n'est pas compact, à l'axiome 4 (axiome d'homotopie) de l'axiomatique d'Eilenberg-Steenrod; l'A. montre qu'en faisant usage de recouvrements infinis, on peut définir une cohomologie  $H(X, A)$  pour un espace quelconque  $X$  et un sous-espace arbitraire  $A$  (non nécessairement fermé) de  $X$ , qui satisfait aux sept axiomes de la théorie d'Eilenberg-Steenrod. Il ne précise pas, toutefois, quels rapports ont les groupes obtenus avec les cohomologies obtenues par les autres théories. Thom (Strasbourg).

**Chern, Shiing-Shen and E. Spanier:** The homology structure of sphere bundles. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 248—255 (1950).

Soit  $X$  un espace fibré dont la fibre est la sphère  $S^d$ , et la base un complexe fini connexe  $B$ . La cohomologie étant prise par rapport à un domaine fixe de coefficients, soit  $f^*$  l'homomorphisme  $H^r(B) \rightarrow H^r(X)$  induit par l'application canonique  $X \rightarrow B$ ; les  $AA$ . établissent l'existence d'homomorphismes  $\Phi: H^p(X) \rightarrow H^{p-d}(B)$  et  $\Psi: H^p(B) \rightarrow H^{p+d+1}(B)$  tels que la suite

$$\rightarrow H^p(B) \xrightarrow{f^*} H^p(X) \xrightarrow{\Phi} H^{p-d}(B) \xrightarrow{\Psi} H^{p+1}(B) \rightarrow$$

soit une suite exacte. Soit de plus  $\omega$  la classe unité de  $H^0(B)$ ; alors  $\Omega = \Psi\omega$  est la classe caractéristique fondamentale de la structure fibrée, et, pour toute classe  $u \in H(B)$ , on a  $\Psi u = u \cup \Omega$ . Résultats duaux pour l'homologie. Ces théorèmes généralisent et systématisent les résultats antérieurs de Gysin, et ceux, plus récents,



de Hirsch et Leray. Ils sont établis ici dans le cadre de l'axiomatique d'Eilenberg-Steenrod. Comme il est indiqué à la fin, le Ref. s'était servi de l'essentiel de ces résultats (établis par une autre méthode) peu avant les AA. Toutefois, alors que sa méthode introduit nécessairement des conditions d'orientabilité pour l'espace  $X$  — ou, sinon, des coefficients locaux pour la cohomologie — ces difficultés n'apparaissent pas dans l'énoncé des AA. et semblent bien leur avoir échappé. *Thom.*

**Sitnikov, V.: Über stetige Abbildungen des Euklidischen Raumes.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 621—623 (1950) [Russisch].

Borsuk hat gezeigt, [Fundam. Math., Warszawa **21**, 236 (1933); dies. Zbl. **8**, 133], daß bei einer stetigen Abbildung  $\varphi$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^n$  in sich, bei der die Urbilder  $\varphi^{-1}y$  für alle  $y \in \varphi R^n$  gleichmäßig beschränkt sind, die Menge  $\varphi R^n$  in  $R^n$  offen ist und die  $(n-1)$ -dimensionale Bettische Zahl von  $\varphi R^n$  gleich Null ist. Verf. zeigt allgemeiner (ohne Benutzung der Ergebnisse von Borsuk), daß unter denselben Bedingungen alle Bettischen Gruppen von  $\varphi R^n$  verschwinden. Der Beweis stützt sich hauptsächlich auf die Tatsache, daß der lokale Grad der Abbildung  $\varphi$  für alle Punkte  $y \in \varphi R^n$  gleich  $\pm 1$  ist. *Burger* (Frankfurt/M.).

**Hu, Sze-Tsen: On the Whitehead group of automorphisms of the relative homotopy groups.** Portugaliae Math. **7**, 181—206 (1948).

Sei  $Y_0$  eine abgeschlossene in  $Y$  enthaltene Punktmenge und seien  $Y, Y_0$  absolute Nachbarschaftsretrakte. Alsdann lassen sich die Begriffe Weg und Homotopie von Wegen erweitern, indem man als Weg modulo  $Y_0$  mit dem Anfangspunkt  $y_0$  in  $Y_0$  eine Abbildung  $f(y, \tau)$  des direkten Produktes von  $Y_0$  und der Einheitsstrecke  $0 \leq \tau \leq 1$  in  $Y$  erklärt, für welche  $f(y, 0) = y, f(y, 1) = y'$  in  $Y_0, f(y_0, 1) = y_0$  gilt und für welche die Abbildung  $f(y, 1) = y'$  ein Homotopieinverses im Sinne von Fox besitzt. Die Homotopieäquivalenz wird wie üblich erklärt. Das Produkt  $h(y, \tau)$  zweier Relativwege  $f(y, \tau), g(y, \tau)$  ist durch  $h(y, \tau) = f(y, 2\tau), 0 \leq 2\tau \leq 1$ , und  $h(y, \tau) = g(f(y, 1), 2\tau - 1), 1 \leq 2\tau \leq 2$  erklärt. Alsdann bilden die Homotopieklassen dieser Relativwege eine Gruppe, die Whiteheadgruppe  $W(Y, Y_0, y_0)$ . Es wird nun gezeigt, daß die Elemente von  $W$  Automorphismen der relativen Homotopiegruppen  $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$  induzieren, welche mit dem Berandungsoperator in der Folge dieser Gruppen vertauschbar sind. Zwischen  $W$  und  $\pi_1(Y, y_0), \pi_1(Y_0, y_0)$  bestehen Homomorphismen, welche invariante Untergruppen in  $W$  bestimmen, und so die Struktur von  $W$  erhellen. Als Beispiel wird eine  $n$ -dimensionale Zelle  $Y$  mit der Randsphäre als Untermenge  $Y_0$  behandelt. Hier ist  $W$  zyklisch vom Grade 2. *K. Reidemeister* (Marburg/L.).

**Whitehead, J. H. C.: The secondary boundary operator.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 55—60 (1950).

In Comment. math. Helvetici **22**, 48—92 (1949) hat Verf. die Homotopietypen der vierdimensionalen einfach-zusammenhängenden Polyeder untersucht und bewiesen, daß zwei solche Polyeder dann und nur dann vom selben Homotopietyp sind, wenn ihre „erweiterten“ Kohomologieringe „eigentlich“ isomorph sind. Ferner wurden die algebraischen Eigenschaften, denen ein Ring genügen muß, damit er der erweiterte Kohomologiering eines solchen Polyeders ist, genau angegeben. In der vorliegenden Note wird (ohne Beweise) angegeben, daß in den eben erwähnten Sätzen der erweiterte Kohomologiering durch eine gewisse exakte Gruppenfolge ersetzt werden kann, die folgendermaßen definiert ist: Sei  $K$  ein  $n$ -dimensionaler einfach-zusammenhängender Komplex,  $H_\nu$  seine (ganzzahligen) Homologie-,  $\pi_\nu$  seine Homotopiegruppen,  $\Gamma_\nu$  das Bild von  $\pi_\nu(K^{\nu-1})$  beim Einbettungshomomorphismus ( $\nu > 2$ ). Dann ist die Folge

$$S_n(K): H_n \xrightarrow{b} \Gamma_{n-1} \xrightarrow{i} \pi_{n-1} \xrightarrow{j} H_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_3 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2 \rightarrow H_2 \rightarrow 0$$

exakt, wenn  $i$  der Einbettungshomomorphismus,  $j$  der natürliche Homomorphismus ist und der Randoperator  $b$  folgendermaßen erklärt ist: Für  $\nu \geq 3$  ist bekanntlich die Kettengruppe  $C_\nu(K) = \pi_\nu(K^\nu, K^{\nu-1})$  und für  $\nu \geq 4$  der Kettenrand  $d = k\beta$ , wo  $\beta: \pi_\nu(K^\nu, K^{\nu-1}) \rightarrow \pi_{\nu-1}(K^{\nu-1})$  der Randoperator der Homotopiefolge und  $k: \pi_{\nu-1}(K^{\nu-1}) \rightarrow \pi_{\nu-1}(K^{\nu-1}, K^{\nu-2})$  der Einbettungshomomorphismus ist. Für einen Zyklus  $z \in C_\nu(K)$  ist dann wegen der Exaktheit der Homotopiefolge  $\beta z \in \Gamma_{\nu-1}$  und nur abhängig von der Homologieklasse von  $z$ . Also induziert  $\beta$  einen Homomorphismus  $b: H_\nu \rightarrow \Gamma_{\nu-1}$ . — Sei  $\lambda: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopfsche Abbildung der 3-Sphäre auf die 2-Sphäre.

Sei ein Element  $a \in \pi_2(K)$  durch die Abbildung  $\mu: S^2 \rightarrow K^2$  dargestellt. Dann stellt  $\mu \lambda: S^3 \rightarrow K^2$  ein Element  $\lambda(a) \in I_3$  dar, das offenbar nur von  $a$  abhängt. Ein Homomorphismus von  $S_n(K)$  in  $S_n(K')$  [d. h. Homomorphismen der Gruppen von  $S_n(K)$  in die entsprechenden Gruppen von  $S_n(K')$ , die mit den Homomorphismen in den Folgen  $S_n(K)$  bzw.  $S_n(K')$  vertauschbar sind] heißt eigentlich, wenn er außerdem mit der Zuordnung  $\lambda: \pi_2 \rightarrow I_3$  vertauschbar ist. Dann gilt: zwei vierdimensionale einfach-zusammenhängende Komplexe  $K$  und  $K'$  sind dann und nur dann vom gleichen Homotopietyp, wenn  $S_4(K)$  und  $S_4(K')$  eigentlich isomorph sind. — Die Elemente  $\lambda(a)$  für alle  $a \in \pi_2$  erzeugen  $I_3$ , und zwar kann ein System definierender Relationen zwischen ihnen explizit angegeben werden, so daß durch diese Vorschrift jeder (abelschen) Gruppe  $A$  eine (abelsche) Gruppe  $\Gamma(A)$  zugeordnet werden kann, wobei  $\Gamma(\pi_2) \approx I_3$  ist. Sei nun  $S_4: H_4 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots$  eine rein algebraisch gegebene exakte Folge von abelschen Gruppen mit  $\Gamma(\pi_2) \approx I_3$  und  $I_2 = 0$ . Dann ist  $S_4$  dann und nur dann die Folge  $S_4(K)$  a) eines höchstens vierdimensionalen Komplexes  $K$ , wenn  $H_4$  frei ist, b) eines endlichen Komplexes  $K$ , wenn  $H_2, H_3, H_4$  endliche Erzeugendensysteme haben. — Die Konstruktion der Gruppe  $\Gamma(A)$  wird auch benutzt, um in einfacher Weise die Pontrjaginsche Quadrierungsoperation für die Kohomologieklassen [C. R. Acad. Sci. URSS **34**, 35 (1942)] einzuführen. Ferner wird ein konstruktives Verfahren zur Berechnung von  $S_4(K)$  in Aussicht gestellt.

Burger (Frankfurt/Main).

**MacLance, Saunders und J. H. C. Whitehead: On the 3-type of a complex.**

Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 41—48 (1950).

Deux complexes cellulaires  $K, K'$  sont de même  $n$ -type, s'il existe des applications  $\varphi: K_n \rightarrow K'_n, \varphi': K'_n \rightarrow K_n$  telles que  $\varphi' \varphi: K_{n-1} \rightarrow K_{n-1}$  et  $\varphi \varphi': K'_{n-1} \rightarrow K'_{n-1}$  soient homotopes à l'application identique. Un  $n$ -type est caractérisé par un système d'homotopie [v. J. H. C. Whitehead, Bull. Amer. math. Soc. **55**, 453—496 (1949)], c'est-à-dire par la suite des groupes  $\pi^n(K^n, K^{n-1}), \dots \rightarrow \pi^1(K^1) \rightarrow \pi^1(K)$  avec opérateurs dans  $\pi_1(K)$  et des homomorphismes  $\varrho_n: \pi^n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow \pi^{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$ . Pour  $n = 3$ , la suite obtenue n'est pas exacte; on peut toutefois en déduire la suite:  $0 \rightarrow \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(K, K_1) \rightarrow \pi_1(K_1) \rightarrow \pi_1(K)$  qui est exacte. Cette suite croisée à opérateurs permet de définir le 3-type algébrique: le groupe  $\pi_1$ , le groupe  $\pi_2$  (avec opérateurs dans  $\pi_1$ ), et la classe de cohomologie  $k \in H^3(\pi_1, \pi_2)$ , définie comme obstruction de cette suite [cette classe a été introduite par Eilenberg-Mac-Lane (ce Zbl. **34**, 111)]. Le théorème central affirme: la donnée de  $\pi_1, \pi_2$  et  $k$  détermine le 3-type (le 2-type est caractérisé par  $\pi_1$  seul). Tout système  $(\pi_1, \pi_2, k)$  est réalisable par un polyèdre  $K_3$ , et si  $T(K), T(K')$  sont les 3-types algébriques de deux polyèdres  $K, K'$  de dim.  $\leq 3$ , tout homomorphisme  $T(K) \rightarrow T(K')$  peut être induit par une application  $K \rightarrow K'$ . La démonstration repose essentiellement sur des théorèmes de réalisabilité démontrés par J. H. C. Whitehead (loc. cit.): c'est le premier exemple d'un invariant de la théorie—jusqu'alors purement combinatoire — de J. C. H. Whitehead qui puisse être défini par un invariant de cohomologie.

Thom (Strasbourg).

**Borsuk, Karol: On topological approximation of polytopes.** Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 257—276 (1949).

Dans l'impossibilité de donner des polytopes une caractérisation topologique intrinsèque, l'A. définit certaines classes d'espaces approximations des polytopes: soit  $K$  une famille „transitive“ d'applications; alors l'ensemble des espaces de la forme  $f(P)$ , où  $f \in K, P$  polytope arbitraire, est une approximation; cette approximation est topologique, si les espaces  $f(P)$ , ainsi que les applications de  $K$ , peuvent être caractérisés par des propriétés topologiques intrinsèques; par exemple, l'ensemble des  $f(P)$  où  $f$  est une application continue quelconque, est une approximation (que l'A. désigne par  $K_1$ ) qui est topologique (ce sont les compacts localement connexes); au contraire, l'ensemble des  $f(P)$ , où  $f$  est un homéomorphisme, constitue l'approximation idéale  $K_\infty$  de tous les polytopes, laquelle n'est pas topologique en l'état actuel de nos connaissances. En prenant pour  $f$  une rétraction, l'A. définit l'approximation  $K_2$  qui est topologique (espaces définis par compacité, dimension finie et contractibilité locale), puis deux sous-classes de  $K_2$  définies par deux propriétés topologiques  $\Delta$  et  $\Delta_1$ ; ( $\Delta$ ) est une forme plus précise de la contractibilité locale qui s'énonce ainsi: tout voisinage  $U$  d'un point  $x$  contient un voisinage  $V$  tel que

tout compact  $E \subset V$  est contractible en un point dans un compact  $F \subset U$  pour lequel  $\dim F \leq 1 + \dim E$ ; les applications correspondantes sont les rétractions qui peuvent être approchées par des applications qui diminuent la dimension; des exemples montrent que  $K_{2A}$  ne contient pas toute  $K_2$ ; la propriété  $A$  se rapporte à la décomposition en une réunion finie d'espaces dont les intersections sont des rétractes absolus; c'est une forme atténuée de la décomposition simpliciale. On ne sait si la propriété  $A$  entraîne  $(A)$ ; l'A. définit cependant les classes  $K_{2A}$  et  $K_3 = K_{2A} \cap K_{2A}$  qui est la meilleure approximation topologique connue des polytopes.

Thom (Strasbourg).

Wallace, A. D.: Cyclic invariance under multi-valued maps. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 820—824 (1949).

$X$  et  $Y$  étant deux espaces de Hausdorff compacts et connexes, soit  $f$  une fonction qui à chaque  $x \in X$  fait correspondre un ensemble  $f(x) \subset Y$ . En supposant que  $\{f(x)\}$  couvre  $Y$ , l'A. pose  $f^{-1}(y) = \{x | y \in f(x)\}$ . Lorsque les  $\{f^{-1}(y)\}$  couvrent  $X$ , on a  $f = (f^{-1})^{-1}$ , et si  $f$  est uniforme on retrouve le sens habituel de  $f^{-1}$ . La continuité d'une  $f$  est alors définie par la condition que si  $A$  et  $B$  sont fermés,  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$ , alors  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$  sont fermés, avec

$$f(A) = \bigcup \{f(x) | x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \bigcup \{f^{-1}(y) | y \in B\}.$$

Une  $f$  est „anarthrique“ si  $f$  est continue, dans le sens ci-dessus, et si pour  $y \in Y$  aucun  $x \in X - f^{-1}(y)$  ne sépare  $f^{-1}(y)$  dans  $X$ . Des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour que  $f$  soit anarthrique. Si  $f$  est anarthrique et l'image de chaque point séparateur est un point,  $f$  conserve la propriété d'un ensemble d'être nodal, ou ensemble  $A$ , ou central. Enfin, l'A. étend un théorème de G. T. Whyburn au cas des fonctions anarthriques.

Calugareanu (Cluj).

Moise, Edwin E.: A note on the pseudo-arc. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 57—58 (1949).

L'A. donne une démonstration d'un résultat de R. H. Bing (v. la note suivante) qui établit qu'un pseudo-arc est un continu homogène. Cette démonstration emploie les notions et résultats d'un travail antérieur de l'A. (ce Zbl. **31**, 418).

Calugareanu (Cluj).

Bing, R. H.: A homogeneous indecomposable plane continuum. Duke math. J. **15**, 729—742 (1948).

Ce travail apporte une réponse au problème suivant de Knaster et Kuratowski [Fundam. Math., Warszawa **1**, 123 (1920)]: Un continu plan, borné, homogène, se réduit-il nécessairement à une courbe fermée simple? (L'ensemble  $E$  est homogène si,  $p$  et  $q$  étant deux points quelconques de  $E$ , il existe une homéomorphie de  $E$  en lui-même qui transforme  $p$  en  $q$ .) L'A. construit un exemple de continu plan, borné, homogène, qui n'est pas une courbe fermée simple, mais un continu indécomposable, homéomorphe à celui que E. E. Moise (ce Zbl. **31**, 418) a construit pour répondre à un problème de Mazurkiewicz. Cet exemple contredit les affirmations de Waraskiewicz [C. r. Acad. Sci., Paris **204**, 1388—1390 (1937)] et Choquet [C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 542—544 (1944)]. Le continu  $M$  en question jouit d'une homogénéité plus spéciale, faisant intervenir, au lieu des points  $p$  et  $q$ , deux souscontinus de  $M$ , et deux paires de points, convenablement choisis, de ces souscontinus.

Calugareanu (Cluj).

Jones, F. Burton: A note on homogeneous plane continua. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 113—114 (1949).

On sait que la propriété d'un continu plan borné  $M$  d'être homogène n'implique pas que  $M$  est une courbe fermée simple (voir ci-dessus et ce Zbl. **31**, 418). L'A. se propose de trouver les conditions supplémentaires qu'il convient d'ajouter à l'homogénéité pour que  $M$  se réduise à une courbe fermée simple. En employant ses résultats antérieurs [Amer. J. math. **63**, 545—553 (1941); **70**, 403—413 (1948);



ce Zbl. 25, 240; 35, 109] l'A. établit qu'il suffit, à cet effet, que  $M$  soit homogène et „aposyndétique“ (ce Zbl. 25, 240), ou bien que  $M$  soit homogène et ne contienne aucun „point séparateur faible“ ( $p$  est séparateur faible s'il existe  $x$  et  $y$  dans  $M - p$  tels que tout continu contenant  $x$  et  $y$  contient aussi  $p$ ). *Calugareanu* (Cluj).

**Moise, Edwin, E.: A theorem on monotone interior transformations.** Bull. Amer. math. Soc. 55, 810—811 (1949).

L'A. répond négativement à cette question posée par B. Knaster [Fundam. Math., Warszawa 25, 568—577 (1935); ce Zbl. 12, 319]: Existe-t-il un continu métrique compact  $M$ , irréductible entre deux de ses points, et une transformation intérieure  $T$ , telle que  $T(M)$  soit l'intervalle-unité, et pour chaque  $x \in T(M)$  l'ensemble  $T^{-1}(x)$  soit un arc simple? Par l'emploi des „chaines simples d'ensembles ouverts“, l'A. arrive à conclure qu'un tel continu  $M$  devrait contenir un continu indécomposable, ce qui est contradictoire. *Calugareanu* (Cluj).

## Klassische theoretische Physik.

● **Becker, Richard: Vorstufe zur theoretischen Physik.** Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VII, 172 S.

Entsprechend dem Vorwort des Verf. soll das Büchlein angehenden Studenten der theoretischen Physik das Verständnis erleichtern für die inneren Zusammenhänge und engen gegenseitigen Wechselwirkungen zwischen dem physikalischen Tatbestand und seiner mathematischen Behandlung. Erstrebt — und erreicht — wird dieses Ziel durch die ausführliche Behandlung einer großen Zahl von Beispielen einerseits aus der Mechanik der Massenpunkte, der Pendel, Ketten und Stäbe, andererseits aus der Wärmelehre. Besondere Beachtung verdient hier der Abschnitt über die kinetische Gastheorie, während es zunächst etwas befremdet, daß der Entropiebegriff, freilich nur für ein ideales Gas, bereits im Abschnitt über den I. Hauptsatz der Thermodynamik eingeführt wird. Ein mathematischer Anhang über verschiedene Fragen der Analysis (z. B. Stirlingsche Formel) und der Vektorrechnung beschließen das für den Anfänger und auch für den fortgeschrittenen Studenten durchaus empfehlenswerte Büchlein. *F. Sauter* (Göttingen).

**Roth-Desmeules, E.: Über das Rechnen mit Größen.** Elemente Math., Basel 4, 105—111 (1949).

Auf Grund einfacher mathematischer Erörterungen wird gezeigt, daß es einen genau angebbaren Sinn hat, physikalische Gleichungen als Gleichungen zwischen physikalischen Größen aufzufassen, und es werden die Vorteile einer solchen Auffassung beleuchtet. *Schouten* (Epe).

## Mechanik:

● **Gant, P.: Mechanics. Parts 1—3 and Part 4.** London: G. Bell and Sons, Ltd., 1949. VIII, 282, V; VIII, 283—440, X p. 7 s. 6 d.; 5 s. 6 d.

Verf. gibt eine Einführung in die elementare Mechanik, welche besonders für den Schulgebrauch geeignet ist, da sich der Inhalt auf die einfachsten rechnerischen Formulierungen beschränkt und der Text durch zahlreiche geschickt ausgewählte Anwendungsbeispiele belebt wird, welche sich größtenteils an Hand einfacher Versuchsanordnungen demonstrieren lassen. Im einzelnen wird behandelt: Kinematik (Geschwindigkeit, Beschleunigung), Dynamik (Bewegungsgleichung, Kraft, Arbeit, Energie, Impuls), Statik (Kräfte an einem Punkt, Resultierende, Kräftepaare und Momente, einfache Maschinen, Schwerpunkt, Cremonaplan), Ergänzungen zur Statik und Dynamik (Gleichgewicht verbundener Körper, Biegemoment, Querkraft, Kreisbewegung, harmonische Schwingung, gekoppelte Pendel, Wellenbewegung, Hookesches Gesetz, Stoßvorgänge). *H. Neuber* (Dresden).

● **Roy, Louis:** Cours de mécanique rationnelle. IV: Problèmes et exercices, suivi d'un appendix sur les fusées. (Cours de la Faculté des Sciences de Toulouse). Paris: Gauthier-Villars 1950. XI, 276 p.

Verf. läßt seinem Werk über Mechanik einen vierten Band mit Problemen und Übungen folgen, die hauptsächlich Kinetik betreffen. Dementsprechend gliedert sich das Buch in vier Teile: Kinematik, materieller Punkt, Systeme von materiellen Punkten und deformierbare Continua. Am Schluß ein Anhang über die Bewegung der Rakete. Die getroffene Auswahl hält sich von dem Üblichen ziemlich fern, sie ist anregend und interessant. Teilweise sind die Aufgaben sichtlich von mathematischem Interesse diktiert, teilweise aber berühren sie auch Probleme der modernen Physik und der Astronomie. Der Student kann sicher viel aus ihnen lernen. Besonders hervorgehoben seien die Ratschläge, die Verf. zu Anfang in witziger, geistreicher Weise dem Studenten gibt, und die sich bis zur Benutzung von Tafel, Schwamm und Kreide erstrecken.

*Hamel (Landshut).*

**Salas, J. Martinez:** Über eine Arbeit von M. Brelot. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 283—290 (1948) [Spanisch].

Verf. gibt die Grundzüge der Darstellung wieder, in welcher M. Brelot [Les principes mathématiques de la mécanique classique. Arthaud, Grenoble/Paris, 1945] den Übergang von der Mechanik der Punkthaufen zur Mechanik der Continua in mathematisch strenger Form behandelt hat, indem er Massenverteilungen und entsprechende Vektorfelder als volladditive Funktionen auf Borelschen Mengen aufbaute.

*Bödewadt (Brunoy).*

**Cicco, John De:** Constrained motion upon a surface under a generalized field of force. Bull. Amer. math. Soc. 53, 993—1001 (1947).

Les mouvements étudiés ici sont ceux d'une particule astreinte à se mouvoir sur une surface  $\Sigma$  et soumise uniquement à la force d'un champ généralisé (force fonction d'un élément linéaire  $E$  tangent à  $\Sigma$ ). L'A. se propose d'étendre à de tels mouvements les résultats obtenus par Kasner et Cicco dans le cas de mouvements plans [Trans. Amer. math. Soc. 54, 23—38 (1943)]. Il montre que, si  $(u, v)$  est la représentation paramétrique de  $\Sigma$ , les trajectoires sont solutions d'une équation différentielle du type  $(F)$

$$v''' = F(u, v, v') + v'' G(u, v, v') + v'^2 H(u, v, v')$$

où  $u$  joue le rôle de variable indépendante. Inversement toute équation différentielle de ce type qui est satisfaite par l'ensemble des géodésiques de  $\Sigma$  peut représenter les trajectoires d'une particule pour un champ généralisé convenable. Dans le cas d'un mouvement plan, sous l'action d'un champ généralisé, Kasner et Cicco ont établi que, pour l'élément linéaire initial, le quotient  $\varrho$  des courbures d'une trajectoire de repos et de la ligne de force correspondante est donné par la formule

$$\varrho = (1 - \lambda)/(3 - \lambda)$$

où  $\lambda$  est le taux angulaire de variation de la force quand l'élément linéaire  $E$  tourne autour de son centre. Cette formule est étendue par l'A. au cas d'un mouvement sur une surface  $\Sigma$  à condition de remplacer les courbures par les courbures géodésiques.

*Lichnerowicz (Paris).*

**Pailloux, Henri:** Extension de la notion de paramètre de Lagrange. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1136—1138 (1950).

Ausdehnung der Lagrangeschen Mechanik auf Systeme von unendlichem Freiheitsgrad. Mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips werden Bewegungsgleichungen aufgestellt, die die Form Lagrangescher Gleichungen haben, wobei die Ableitungen funktionell zu verstehen sind. Beispiel des schwingenden Fadens. Darf Ref. auf Kap. V, § 10 seiner „Theoretischen Mechanik“ hinweisen? *Hamel (Landshut).*

**Carrier, G. F.:** The spaghetti problem. Amer. math. Monthly 56, 669—672 (1949).

Es handelt sich um zwei Aufgaben aus der Theorie des idealen Fadens: 1. dem Spaghetti-Problem, bei dem ein Faden in vertikaler Richtung mit konstanter Beschleunigung durch eine Öffnung gezogen wird und dabei in Schwingungen gerät. Für diese läßt sich aus der allgemeinen Schwingungsgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Sturm-Liouvilleschen Typus ableiten, deren Eigenwerte reell sind. Für die Schwingung ergibt sich mit eventueller Ausnahme der niedersten Frequenzen eine Anfachung. — 2. dem Problem der Gitarre, bei dem die Saite an zwei Punkten festgehalten wird, von denen aber nur der eine ganz fest ist, der andere längs der Saite gleitet, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit. Hier entstehen ungedämpfte und nicht angefachte Schwingungen, doch muß die Geschwindigkeit beschränkt sein, da sonst eine Singularität der Differentialgleichung eine Lösung unmöglich machen kann. *Hamel* (Landshut).

**Goldoni, Gino:** Sul polo delle accelerazioni nel moto di un corpo rigido libero. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 1, 12—16 (1947).

L'A. prova che nel moto di un corpo rigido con velocità angolare  $\omega$  tale che  $\omega \wedge d\omega/dt \neq 0$  esiste uno e un sol punto di accelerazione nulla. Se  $\omega \wedge d\omega/dt = 0$  (ma  $\omega$  e  $d\omega/dt$  non sono contemporaneamente nulli) i punti di accelerazione nulla si trovano su una retta parallela alla velocità angolare. *Graffi* (Bologna).

**Andélic, Tatomir P.:** Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique du corps solide. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 201—215 und franz. Zusammenfassg. 215—216 (1948) [Serbisch].

Sujet: Introduction. 1. Pfaffian. 2. Équations de Pfaff. 3. Pfaffian déterminant le mouvement du corps solide. 4. Équations vectorielles du mouvement du corps solide sous forme des équations de Pfaff. — D'abord on a donnée des explications sur les Pfaffians et les équations de Pfaff sous forme vectorielle et puis sur la méthode de Pfaff développée par Bilimovitch [Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur. A. 189 (1946)]. — On a établi ensuite, en s'appuyant sur ces développements, l'élément d'action au sens de Hamilton pour le corps solide sous forme d'un Pfaffian, utilisant à cet effet les résultats obtenus par Bilimovitch pour un système matériel dans son travail déjà cité. — Ce Pfaffian a la forme suivante

$$\Phi = (\vec{K} \vec{dr}_A) + (\mathfrak{M}^{(4)}, \vec{d\alpha}) - H dt,$$

$\vec{K}$  étant la quantité de mouvement du corps solide,  $\vec{r}_A$  le rayon vecteur d'un point  $A$  dans le corps solide, rapporté à l'origine d'un système invariable de référence,  $\mathfrak{M}^{(4)}$  le moment des quantités de mouvement du corps solide,  $\vec{d\alpha}$  l'élément angulaire vectoriel. Enfin la fonction  $H$  est donnée par l'équation  $H = T - U$ ,  $T$  étant la force vive du corps solide et  $U$  étant le travail de la résultante  $\vec{F}$  des forces extérieures calculé de la position initiale déterminée par  $\vec{r}_0$  jusqu'à une position finale déterminée par  $\vec{r}$ . — On démontre enfin que les équations vectorielles de Pfaff correspondant au Pfaffian ainsi formé sont les équations du mouvement du corps solide sous forme vectorielle suivante données par Bilimovitch [Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur. A. 127 (1927)]

$$\frac{d}{dt} \text{grad}_{\vec{v}_A} T = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt} \text{grad}_{\vec{\omega}} T + [\vec{v}_A, \text{grad}_{\vec{v}_A} T] = \vec{L}_A,$$

$\vec{L}_A$  étant le moment résultant des forces extérieures par rapport au point  $A$ .

(Autoreferat).

**Teodoriu, Luca et Rudolf Woinaroski:** Sur la stabilité de l'équilibre d'un point matériel. Disqu. math. phys., București 6, 137—191 (1948).

Verff. untersuchen das Verhältnis des statischen Stabilitätsbegriffes, daß für jede hinreichend kleine Verschiebung Arbeit aufzuwenden sei, zum dynamischen Stabilitätsbegriff, daß jede in einer (nach Ort und Geschwindigkeit) hinreichend



engen Umgebung des Gleichgewichtes beginnende Bewegung in beliebig enger Umgebung des Gleichgewichtes bleibe, wenn die bei einer zulässigen Verrückung auftretenden Kräfte nur Funktionen des Ortes sind. Der Massenpunkt kann frei beweglich oder an eine Fläche oder Kurve gebunden sein. Falls sich nun die Kräfte aus einem (gegebenenfalls nur auf der Fläche oder Kurve bestehenden) Potential ableiten lassen, sind beide Gleichgewichtskriterien gleichwertig. Andernfalls mögen die Kräfte zweimal ableitbar sein und ihre Arbeit  $A$  mit den Gliedern zweiter Ordnung beginnen. Dann bedeutet statische Instabilität ( $A$  immer positiv) zwar auch dynamische Instabilität, aber umgekehrt kann bei statischer Stabilität ( $A$  immer negativ) durchaus dynamische Instabilität vorliegen, wobei noch einfach und zweifach bedingte Instabilitäten erster und zweiter Art unterschieden werden.

*Bödewadt (Brunoy).*

**Woinaroski, Rudolf:** Sur la stabilité des configurations d'équilibre d'un système de points matériels. Disqu. math. phys., Bucuresti 7, 139—149 (1948).

Ausdehnung der vom Verf. zusammen mit L. Teodoriu angestellten Untersuchung (s. vorsteh. Referat) über das Verhältnis von statischer und dynamischer Stabilität auf ein System mehrerer Massenpunkte, die nur holonomen zeitunabhängigen Bindungen unterliegen. Unter denselben Voraussetzungen über die Kräfte wie dort ergibt sich auch hier Gleichwertigkeit für Potentialkräfte; sonst aber reicht statische Stabilität nicht aus für dynamische Stabilität, während diese bei vollständiger statischer Instabilität unmöglich ist.

*Bödewadt (Brunoy).*

**Mack, C.:** The calculation of the optimum parameters for a following system. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 40, 922—928 (1949).

Zur Wahl geeigneter Parameter für ein Nachführungssystem

$$P(d/dt) y(t) = Q(d/dt) x(t),$$

wo  $P(u)$ ,  $Q(u)$  Polynome mit festen Beiwerten bedeuten, empfiehlt Verf. als schnellstes Verfahren, zunächst den quadratischen Mittelwert der Abweichung zwischen

Eingangsfunktion  $x(t)$  und Ausgangsfunktion  $y(t)$ , also das Integral  $C = \int_0^\infty (y - x)^2 dt$ ,

zum Minimum zu machen. Dazu stellt er  $C$  als Integral einer gebrochenen rationalen Funktion dar, die sich verhältnismäßig einfach durch die System-Parameter (die Beizahlen der Differentialoperatoren, also die Beizahlen der Polynome  $P, Q$ ) ausdrückt. Berücksichtigung finden dabei die Fälle, daß  $x(t)$  die Einheitssprungfunktion  $I(t)$  und  $y$  die zugehörige Übergangsfunktion ist, oder daß  $x(t)$  selber als Übergangsfunktion eines anderen Nachführungssystems oder als Fourierintegral vorliegt. Die Auswertung des  $C$ -Integrals braucht nur mit mäßiger Genauigkeit zu erfolgen und kann daher leicht numerisch geschehen, so daß man durch Änderung der Parameter bald die Gegend des Minimums von  $C$  findet.  $C = \text{Min}$  führt zu schneller Einstellung, aber mit ziemlich starker Überregelung; deshalb nimmt Verf., nachdem mit der  $C$ -Probe die günstigen Parameterwerte ungefähr festgestellt

sind, als schärfere Probe das Maß  $D = \int_0^\infty |y - x| dt$  oder noch besser  $E = \int_0^\infty [t(y - x)]^2 dt$ ,

wobei also spätere Abweichungen schwerer bewertet werden. Für  $D$  und  $E$  findet man ähnliche Darstellungen wie für  $C$ , jedoch verlangen sie mehr Rechenarbeit, weswegen eben mit  $C$  begonnen wird.  $E = \text{Min}$  ergibt meistens auch noch schnelle Einstellung bei nur geringer Überregelung. Die endgültige Entscheidung liefert schließlich das Bild der Übergangsfunktion für  $x = I(t)$  oder des Frequenzganges  $\lim y/x$  für  $x = \exp i \omega t$ . Frequenzgang und Stabilität lassen sich leicht mit den Ausdrücken ermitteln, die ohnehin bei der Berechnung von  $C$  gebraucht werden.

*Bödewadt (Brunoy).*

**Chaléat, Raymond:** Sur un dispositif de couplage de plusieurs pendules. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 538—540 (1949).

Im Anschluß an eine Arbeit von J. Haag (dies. Zbl. 33, 218) untersucht Verf. für ein speziell gewähltes Gesetz der impulsiven Energiezufuhr die Möglichkeit der Synchronisierung und das Stabilitätsverhalten der Schwingungen eines Systems von mehreren, miteinander gekoppelten Pendeln. *H. Bilharz* (Freiburg i. Br.).

**Chaléat, Raymond:** *Système d'entretien à plusieurs pendules conjugués.* C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1104—1106 (1949).

Verf. betrachtet eine Reihe von  $n$  linear gedämpften Pendeln, die zur Erzielung synchronen Ganges derart elektromagnetisch gekoppelt sein sollen, daß jedes Pendel seinen abgleichenden Impuls erhält, wenn das vorige durch die Ruhelage geht. Die von J. Haag (dies. Zbl. 33, 218) entwickelte Theorie ergibt dann  $n - 1$  Möglichkeiten für die Synchronisierung. Auch die Bedingungen für die Stabilität der Amplituden werden aufgestellt; im Falle  $n = 2$  sind sie unerfüllbar. Dieses Ergebnis wurde durch Versuche bestätigt, welche immerhin zwei Dauerformen der Bewegung zeigten, die durch sehr verschiedene Stärke der Schwebungen unterschieden waren.

*Bödewadt* (Brunoy).

**Haag, Jules:** *Sur certains systèmes différentiels à solution périodique lentement variable.* C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1229—1231 (1950).

Verf. erweitert seine frühere Theorie über die Synchronisation linearer Schwinger auf den Fall, daß das System kleinen störenden Kräften unterworfen ist, die langsam veränderlich sind. Man erhält angenähert die allgemeine Lösung durch Quadraturen.

*Hamel* (Landshut).

**Bottema, O.:** *On the small vibrations of non-holonomic systems.* Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 848—850 (1949); Indag. math., Amsterdam 11, 296—298 (1949).

Für kleine Schwingungen eines konservativen, jedoch nichtholonomen Systems von  $n$  unabhängigen Koordinaten und  $m$  nichtintegrablen kinematischen Bedingungen um eine Gleichgewichtslage wird entgegen einer Aussage von E. T. Whittaker gezeigt, daß sich holonome und nichtholonome Systeme wesentlich verschieden verhalten. Während bei holonomen Systemen die charakteristische Determinante symmetrisch ist oder durch elementare Umformungen symmetrisch gemacht werden kann, ist sie bei nichtholonomen Systemen wesentlich unsymmetrisch. Es können daher auch nicht reelle Wurzeln der charakteristischen Gleichung auftreten, wie an einem Beispiel gezeigt wird.

*R. Zurmühl* (Darmstadt).

● **Stoker, J. J.:** *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems.* (Pure and Applied Mathematics, Vol. II.) New York: Interscience Publishers, Inc., 1950. XIX, 273 p., 5.00 \$.

Das Buch gibt eine zusammenfassende Darstellung einer Reihe wichtiger Erscheinungen bei nichtlinearen Schwingungen von Systemen mit 1 Freiheitsgrad. Es ist eine lehrbuchmäßige Darstellung der mathematischen Methoden und der technisch physikalischen Anwendungen, wobei eine Reihe rein mathematischer Fragen über Existenz und Eindeutigkeit im Anhang gesondert behandelt wird, damit der Hauptteil des Buches für Physiker und Ingenieure verständlich ist. Die Probleme der Mechanik sind häufig wesentlich nichtlinear und vorgenommene Linearisierungen oft nur rohe und unbefriedigende Annäherungen, z. B. bei Schwingungen mit großen Ausschlägen. In solchen Fällen kann man oft durch weitere Approximationen eine genügende Genauigkeit erzielen, aber es treten bei nichtlinearen Schwingungen wesentlich neue Erscheinungen auf, z. B. subharmonische erzwungene Schwingungen. Verf. hat als Ziel, die Literatur auf diesem Gebiet bis 1930 ganz zu erfassen, aber eine Reihe wichtiger neuerer Ergebnisse mit einzuarbeiten. — Kap. I stellt kurz die Theorie der linearen Schwingungen von Systemen mit 1 Freiheitsgrad und konstanten Charakteristiken zusammen, um den Kontrast zu nichtlinearen Erscheinungen besser hervortreten zu lassen; Kap. II behandelt freie ungedämpfte Schwingungen eines Systems mit nichtlinearer Rückstellkraft und zeigt

an verschiedenen Beispielen die Vorteile bei geometrischer Veranschaulichung in der Phasenebene ( $x, \dot{x}$ , Weg-Geschwindigkeitsdiagramm). In Kap. III wird bei  $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$  die Dämpfung mit berücksichtigt. Mit  $\dot{x} = v$  wird das Richtungsfeld der Differentialgleichung 1. Ordnung  $\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x) - \varphi(v)}{v}$  mit seinen singulären Punkten diskutiert, Liénards graphische Konstruktion hergeleitet und wieder eine Anzahl physikalischer Aufgaben besprochen (Pendel, Synchronmotor usw.). In Kap. IV kommen periodische äußere Kräfte hinzu. Im wesentlichen wird nach periodischen Lösungen von  $\ddot{x} + c\dot{x} + x + \beta x^3 = H(t)$  mit

$$H(t) = H \cos \omega t - G \sin \omega t \text{ oder } F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t$$

(Kombinationstöne) gefragt. Mit Hilfe von Störungsrechnung und Iterationsverfahren (insbesondere Methode von Rauscher) werden Amplitudenkurven (response curves, Amplitude der erzwungenen Schwingung als Funktion der Erregerfrequenz bei fester Amplitude der äußeren Kraft) aufgestellt und Kippschwingungen (jump phenomenon) und Stabilitätsfragen diskutiert. Kap. V behandelt selbsterregte und sich selbst erhaltende (self sustained) Schwingungen, bei denen die Dämpfungskraft bei kleinen Geschwindigkeiten die Amplitude zu vergrößern, bei großen aber zu verkleinern sucht (Brücken-, Flatter-, Röhrenschwingungen). Bei der van der Pol'schen Gleichung  $\ddot{x} + \varepsilon(-\dot{x} + \frac{1}{3}\dot{x}^3) + x = 0$  zeigt die Liénardsche Konstruktion das Auftreten einer Grenzkurve in der Phasenebene, in die nichtperiodische Lösungen einmünden; es können in anderen Fällen auch  $\infty$  viele Grenzzykeln auftreten. Bei starker Abweichung von der Linearität treten stoßartige Schwingungen (relaxation) auf. Bei erzwungenen Schwingungen und nur geringer Abweichung von der Linearität ist eine Größe  $\sigma$  (detuning, Differenz der Frequenzen der freien und erzwungenen Schwingungen) wichtig. Die Grenzfälle kleines und großes  $\sigma$  lassen sich mit den Methoden von van der Pol, Andronow und Witt und anderen Verfahren behandeln, aber der Fall eines allgemeinen  $\sigma$  ist sehr verwickelt (Kippschwingungen usw.). Die Frage nach der Stabilität einer periodischen nichtlinearen Schwingung führt auf eine Hillsche Differentialgleichung. Kap. VI bringt die Theorie der Hillschen und speziell der Mathieuschen Gleichung mit Anwendung auf die Duffing'sche Gleichung. In den Anhängen bringt Appendix I eine Rechtfertigung der Störungsrechnung, II die Existenz einer speziellen Art von Kombinationsschwingungen in Form fastperiodischer Lösungen, III Existenz von Grenzzykeln bei freien sich selbst erhaltenden Schwingungen, IV Relaxationsschwingungen bei der van der Pol'schen Gleichung bei kleiner Abweichung von der Linearität, V Ableitung eines Poincaréschen Stabilitätskriteriums und VI Eindeutigkeit eines Grenzzykels bei Appendix III.

Collatz (Hannover).

**Maravall, Darío: Das Problem der Saite und der Wellenbegriff.** Euclides, Madrid 9, 3—6 (1949) [Spanisch].

Übergang von Hamiltons Aufgabe der querschwingenden Punktkette, in der jedes Teilchen nur von seinen Nachbarn elastisch gemäß dem Unterschied der Ausschläge angezogen wird, zur schwingenden Saite. Der Übergang wird zuerst an den Lösungen, dann an den Differentialoperatoren vorgeführt, wobei man auf die d'Alembertsche Lösung der hin- und rücklaufenden Welle gerät. Bödewadt.

**Slater, N. B.: The motion of point-masses in terms of their mutual distances.** Proc. Leeds philos. lit. Soc. sci. Sect. 5, 75—80 (1948).

In Punktsystemen werden von paarweisen Abstandskoordinaten die Beiträge zur kinetischen Energie (in der Hamiltonschen Form) auf elementare Weise bestimmt. Dies geschieht zunächst für zwei Punkte, dann für  $N (> 2)$  Punkte, wobei  $3N - 6$  wechselseitige Abstände im  $R_3$  als unabhängige Koordinaten verwendet werden. Anwendungen auf das Dreikörperproblem und auf Schwingungen von Massenknoten, die durch Federn elastisch miteinander gekoppelt sind. H. Bilharz.



**Eilander, M.: Historische Betrachtungen über die Grundlagen der Himmelsmechanik.** Simon Stevin, wis. natuurrk. Tijdschr. **27**, 16—51 (1950) [Holländisch].

Nach einer Aufzählung der vier Keplerschen Gesetze (1. feste Bahnebene, darin die Sonne; 2. unveränderliche Flächengeschwindigkeit; 3. Planetenbahnen stets Ellipsen mit Sonne im Brennpunkt; 4. Quadrate der Umlaufzeiten den Kuben der großen Halbachsen verhältig) und ihrer Ableitung aus dem Anziehungsgesetz von Newton folgt eine schöne Untersuchung, welche geringsten Voraussetzungen auf dieses Anziehungsgesetz führen. An den Anfang stellt Verf. den Satz von Halphen, daß aus dem ersten der oben aufgezählten Keplerschen Gesetze bereits auf ein zur Sonne gerichtetes Zentralkraftfeld (und damit auf den Flächensatz) zu schließen ist. Dieses erste Gesetz ebener Bahnen erlaubt noch vielerlei Bahnformen und Anziehungsgesetze, wofür Verf. eine lange Reihe von Beispielen aufführt. Das erste und dritte Gesetz von Kepler sind zusammen für das Anziehungsgesetz von Newton hinreichend. Doch lassen sich diese Voraussetzungen einschränken, wie eine eingehende Betrachtung der von Bertrand, Darboux und Halphen durchgeführten Untersuchungen zeigt, welche durch Doppelsternbeobachtungen angeregt worden waren und übrigens in den Lehrbüchern nicht immer treffend dargestellt werden. — Das Ergebnis ist, daß außer den drei Voraussetzungen: 1. Das Kraftgesetz läßt nur ebene Bahnen zu; 2. die Kraft hängt nur von der Entfernung ab; 3. die Kraft bleibt beschränkt bei beliebig zunehmender Entfernung, noch eine der drei folgenden Voraussetzungen gebraucht wird, um eindeutig auf das Newtonsche Gesetz zu kommen: 4. Jede mögliche Bahn ist (bei nicht zu großer Anfangsgeschwindigkeit) eine geschlossene nicht durch die Sonne führende Kurve; 5. Jede mögliche Bahn ist ein Kegelschnitt; 6. Jede mögliche Bahn ist eine algebraische Kurve. Zuerst hat Bertrand die Frage mit den Voraussetzungen 1 bis 4 gestellt und gelöst. Später aber hat er die Aufgabe so gestellt, daß nur die Voraussetzung 5 (welche 1 umfaßt) ohne 2 und 3 zugelassen ist. Er hat hierzu (kurz vor dem oben erwähnten Satz von Halphen) noch gezeigt, daß Kegelschnittbahnen ein Zentralkraftfeld voraussetzen, und Darboux hat unmittelbar darauf die Aufgabe gelöst, bald danach auch Halphen. Dabei sind also auch die richtungsabhängigen Kraftgesetze ermittelt worden. Die Bedingung 6 ist von Königs gegeben worden. — Übrigens hat schon Newton selber, freilich unter ausdrücklicher Voraussetzung eines Zentralkraftfeldes, das Kraftgesetz für eine Kegelschnittbahn (mit Mittelpunkt) in einer Form aufgestellt, aus der sich, wie Glaisher gezeigt hat, ziemlich leicht die von Darboux und Halphen gefundenen Formen ableiten lassen, so daß man mit den Voraussetzungen 2 und 3 wieder eindeutig auf das  $r^{-2}$ -Gesetz kommt. (Verf. erblickt hier wesentliche Unterschiede zwischen den Fragestellungen von Newton und Bertrand.) Abschließend geht Verf. auf einen einschlägigen Satz von Hamilton ein.

Bödewadt (Brunoy).

**Hölder, Ernst: Zusätzliche Stabilitätsbetrachtung betreffend „Die symmetrischen periodischen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems in der Nachbarschaft eines kritischen Keplerkreises“.** Amer. J. Math. **72**, 157—160 (1950).

In einer 1938 erschienenen Arbeit [Amer. J. Math. **60**, 801—814 (1938), Hill-Gedächtnisheft; dies. Zbl. **18**, 376] hat Verf. eine gewisse Klasse von periodischen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung der Stabilität dieser Bahnen nachgeholt. *Stumpff*.

**Corner, J.: The ballistic effects of bore resistance.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 232—245 (1949).

Der Einfluß eines Bewegungswiderstandes im Rohre wurde bisher in der inneren Ballistik der Geschütze entweder vernachlässigt oder nur summarisch behandelt. Verf. gibt ein Verfahren zur Berücksichtigung beliebiger Formen des Widerstandsverlaufes, indem er sich den Widerstand in Elemente zerlegt denkt, über deren Wirkungen er nachher summiert. Als Element nimmt er einen Widerstand, welcher einem konstanten Gegendruck über ein kleines Wegstück entspricht und sonst verschwindet. In einem der üblichen innenballistischen Gleichungssysteme wird die Auswirkung eines solchen Widerstandselementes auf die Mündungsgeschwindigkeit und den Höchstdruck als Störung in erster Näherung bestimmt. Mit diesen so berichtigten Kennwerten wird der Bewegungsverlauf dann im Bedarfsfalle einfacher durch strenge Integration ermittelt. In einigen Beispielen zeigt sowohl bei gesamtem wie bei verteiltem Widerstande der Vergleich mit den genauen Lösungen die Brauchbarkeit des Verfahrens. Es ist ungeeignet für sehr starke Widerstände besonders zu Anfang der Bewegung (z. B. den Einpreßwiderstand) und wird auch bei sehr hohen Mündungsgeschwindigkeiten (Ladung dem Geschoßgewicht vergleichbar) ungenau.

Bödewadt (Brunoy).

**Poppinga, R.: Der Wirkungsgrad der Planetengetriebe.** Ingenieur-Arch. 18, 39—52 (1950).

Verf. befaßt sich mit überschlägiger Vorausberechnung des Wirkungsgrades von Zahnrad-Planetengetrieben. Dabei werden insgesamt 17 Planetengetriebe (drei- und vierräderige sowie zusammengesetzte Planetengetriebe) behandelt. Am Ende der Arbeit gewinnt man eine Übersicht, welche Wirkungsgrade bei den einzelnen Bauformen von Planetengetrieben erwartet werden dürfen. — Aus den Ergebnissen ersieht man, daß Zahnreibungsverluste bei den einzelnen Getrieben sehr verschieden groß und insbesondere stark von der Übersetzung abhängig sein können. Bei hochübersetzenden raumsparenden Planetengetrieben kann durch Verwendung von Innenverzahnungen geringer Zähnezahldifferenz von Hohl- und Planetenrad der Wirkungsgrad auch bei sehr hohen Übersetzungen in erträglichen Grenzen gehalten werden. Bei zusammengesetzten Getrieben hängt der Wirkungsgrad unter Umständen stark davon ab, wie man die Gesamtübersetzung auf die einzelnen Teilgetriebe aufteilt. Die Arbeit enthält Diagramme, die beim Entwurf von Planetengetrieben gute Dienste leisten können. *Dizioğlu (Istanbul).*

### Elastizität. Plastizität. Akustik:

● **Tölke, Friedrich: Mechanik deformierbarer Körper. I: Der punktförmige Körper.** Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. VIII, 388 S. u. 339 Abb., geb. DMark 45.—

Der vorliegende ist der erste Band eines größeren Werkes, das „in Anpassung an die Ausweitung der Probleme der dynamischen und thermischen Beanspruchungen von Konstruktionsteilen und an die Entwicklung der hydrodynamischen und thermodynamischen Grenzgebiete, insbesondere auf dem Gebiete der Schwingungen und Stoßerscheinungen“ die folgenden weiteren Bände umfassen soll: Bd. II. Der statisch beanspruchte feste Körper, Bd. III. Der dynamisch beanspruchte feste Körper, Bd. IV. Der thermisch beanspruchte feste Körper, Bd. V. Flüssigkeiten und Gase. — Bd. I behandelt zunächst den geradlinig bewegten Massenpunkt, erläutert wesentlich an gut gewählten und vollständig durchgerechneten Beispielen die mechanischen Begriffe und bringt außerdem eine neue Formulierung des Newtonschen Kraftgesetzes. In einem weiteren Hauptabschnitt wird der beliebig bewegte Massenpunkt zum Gegenstand der Untersuchung gemacht, wobei von der vereinfachenden Betrachtungsweise der Vektor- und Tensorrechnung weitgehend Gebrauch gemacht wird. In einem ersten Kapitel sind die geometrischen und kinematischen Grundlagen übersichtlich dargestellt, wonach im zweiten Kapitel eine Erläuterung der mechanischen Grundlagen folgt. Im dritten Kapitel sind die Bewegungen in Potentialfeldern, insbesondere im Schwerfeld, im elektrostatischen sowie im Feld der periodischen und aperiodischen harmonischen Schwingungen untersucht. Ein Kapitel über die Mechanik der Raum- und Relativbewegungen beschließt die Untersuchungen über den beliebig bewegten Massenpunkt. — Der letzte Hauptabschnitt behandelt die Mechanik des Punkthaufens und besonders eingehend die gekoppelten harmonischen Schwingungen in Verbindung mit erzwungenen Schwingungen. Ein Kapitel über gedämpfte Schwingungen, wobei linear sowie quadratisch angenommene Dämpfung ausführlich behandelt wird, bildet den Abschluß des ersten Bandes. — Aus dem Vorwort des Verf. seien zum Schluß folgende Sätze wiedergegeben: „In dem vorliegenden ersten Bande ist, neben dem Einbau zahlreicher mathematischer Grundlagen für die folgenden Bände, auch schon größter Wert auf eine möglichst weitgehende Behandlung der Elemente der Schwingungslehre gelegt worden. 55 vollständig durchgerechnete Beispiele aus zahlreichen Gebieten der Technik lassen anschaulich erkennen, wie viele technische Probleme bereits mit den Methoden der Punktmechanik einer vollständigen Lösung entgegengeführt werden können. Es wurde besonderer Wert darauf gelegt, auch die mathematisch schwierigeren Kapitel durch Beispiele zu erläutern. Dort, wo wie im Falle der Schwingungen mit quadratischer Dämpfung keine geschlossenen Lösungen gegeben werden konnten, sind die Ergebnisse in einer Reihe von Zahlentafeln niedergelegt worden, die eine unmittelbare Lösung technischer Aufgaben erlauben. Da die Punktmechanik — im ganzen gesehen — ein seit langem abgeschlossenes Gebiet der klassischen Mechanik darstellt, wurde von Quellen- und Literaturhinweisen grundsätzlich Abstand genommen.“ — Da die Mechanik der deformierbaren Körper heute eine grundlegende Naturwissenschaft darstellt, von der verlangt wird, daß sie mit der sich immer mehr ausweitenden technischen Entwicklung Schritt halten soll, ist das Erscheinen des ersten Bandes sehr zu begrüßen, dem weitere Bände von derselben hohen Qualität bald folgen mögen. *Gran Olsson (Trondheim).*



**Peretti, Giuseppe:** Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazioni della statica dei continui. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 77—82 (1949).

L. Sobrero [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 21, 264—269 (1935)] hat gezeigt, daß bei der Beanspruchung eines einfach-zusammenhängenden ebenen elastischen Kontinuums durch Randkräfte die Airysche Spannungsfunktion  $F$  und die Ableitungen  $F_x$ ,  $F_y$  folgende mechanische Bedeutung haben: Verbindet man einen festen Punkt  $P_0$  der Ebene mit einem variablen Punkt  $P(x, y)$  durch eine Kurve  $C$ , so sind  $F_x$  und  $F_y$  bis auf additive Konstanten die Komponenten der Resultante der Spannung, die durch den Bogen  $C$  übertragen werden;  $F$  ist bis auf in  $x$  und  $y$  lineare Glieder das Moment dieser Spannungen bezüglich  $P$ ; diese Größen hängen nicht ab von der Wahl von  $C$  bei festen Endpunkten. Eine entsprechende Deutung wird hier für den dreidimensionalen Fall abgeleitet bei fehlenden Massenkraften, wo an Stelle von  $F$  ein symmetrischer Tensor tritt, an Stelle von  $C$  das Stück einer Fläche, an Stelle der Endpunkte  $P_0$ ,  $P$  der Rand des Flächenstückes. Die Resultate lauten dann analog wie in der Ebene.

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Synge, J. L.:** Upper and lower bounds for the solutions of problems in elasticity. Proc. Irish Acad. A 53, 41—64 (1950).

Verf. und Prager entwickelten (dies. Zbl. 29, 235, vgl. ferner Verf., dies. Zbl. 29, 55) eine Methode, die es gestattet, durch Deutung der Lösung von Elastizitäts- und Potentialproblemen als Punkt eines Funktionenraumes Schranken für diese Lösung dadurch zu bekommen, daß für die Lage des genannten Punktes ein gewisser Hyperkreis als Spielraum erkannt wird. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, für die Lösungen der zu behandelnden Elastizitätsprobleme bei homogenen isotropen Körpern sei dieser Hyperkreis schon bekannt. Es ergeben sich alsdann obere und untere Schranke 1. für Dilatation und Verrückung eines inneren Punktes bei gegebener Oberflächendeformation, 2. für die Summe der Hauptspannungen und die Spannungskomponenten in einem inneren Punkte bei gegebener Oberflächenspannung. Ein Beispiel bildet der Mittelpunkt einer Kugel, wo die Beziehungen recht einfach werden.

*Maruhn* (Dresden).

**Položij, G. N.:** Eine Lösung des dritten Grundproblems der ebenen Elastizitätstheorie für die unendliche Ebene mit einem quadratischen Loch. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 297—306 (1949) [Russisch].

The third fundamental problem of plane elasticity theory is, according to N. I. Muschelišvili [Some Problems of Elasticity Theory, Leningrad 1933, p. 216], that in which the normal displacements are specified and the shearing stresses are zero on the boundary. Muschelišvili solved this problem for boundaries that can be transformed conformally into circles by means of rational functions. The present study is concerned with the problem of a square hole in an infinite plane. The solution employs certain general plane stress formulas and reduces the problem to known boundary conditions in the theory of functions of a complex variable. Certain assumptions have to be made regarding the way in which the stresses increase near the corners of the hole. *White* (Massachusetts).

**Sokolovskij, V. V.:** Angenäherte Integration der Gleichungen des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 321—322 (1949) [Russisch].

The basic two-dimensional plasticity equations, namely,  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$  and  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$  with  $\sqrt{3}k = \sigma_s$ , the flow stress in simple tension, are transformed into  $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg}(\varphi + \pi/4) \frac{\partial x}{\partial \eta}$  and  $\frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/4) \frac{\partial x}{\partial \xi}$ .



Here,  $\varphi$  is the angle between the  $x$ -axis and the trajectory of the algebraically greater principal stress,  $\xi - \eta = 2\varphi$  and  $\xi + \eta = 2\omega$ , where  $\varphi + \omega$  and  $\varphi - \omega$  are constant along the lines of maximum shear  $\varphi + 45^\circ$  and  $\varphi - 45^\circ$ , respectively (Sokolvski's „Theory of Plasticity“ (1946) Ch. V). Further substitutions

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = p \exp(\omega) \quad \text{and} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = q \exp(-\omega)$$

yield the equations  $\frac{\partial q}{\partial \eta} = \exp(\xi + \eta) \frac{\partial p}{\partial \eta}$  and  $\frac{\partial q}{\partial \xi} = -\exp(\xi + \eta) \frac{\partial p}{\partial \xi}$ . The approximation that is the subject of this paper comes from the fact that over the range of variation of  $2\omega = \xi + \eta$  the quantity  $\exp(\xi + \eta)$  can be represented accurately enough by  $[A(\xi + \eta + a)]^{2n}$  where  $A$  and  $a$  are constants and  $n$  is a positive or negative integer. Then the approximate relations  $\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{n}{\xi + \eta + a} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0$

and  $\frac{\partial^2 q}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{n}{\xi + \eta + a} \left( \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \eta} \right) = 0$  which result must be solved. The solution for the case  $n = \pm 1$  is given.

White (Massachusetts).

**Timpe, A.:** Spannungsfunktionen für die von Kugel- und Kegelflächen begrenzten Körper und Kuppelproblem. Z. angew. Math. 30, 50—61 (1950).

Zur Lösung von Aufgaben der Elastizitätstheorie für Körper, die von Kugel- und Kegelflächen begrenzt sind, wird die Anwendung einer Spannungsfunktion  $F$  angegeben, die der Bipotentialgleichung  $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$  in achsensymmetrischen räumlichen Polarkoordinaten  $r, \chi$  genügt; die Lösungen können aus zwei „Potentialen“ (d. s. Lösungen der Potentialgleichung  $\nabla^2 F = 0$  in diesen Koordinaten) zusammengesetzt werden, durch die dann alle Spannungs- und Verzerrungsgrößen darstellbar sind. Bei den Lösungen zweiten und niederen Ranges ergeben sich Überschneidungen, die besondere „Brückenlösungen“ erfordern. Die Note enthält eine umfangreiche Zusammenstellung von Lösungen der hierher gehörigen Probleme, insbesondere für die Kuppelprobleme, bei denen es auf die Erfassung der in der Kuppel zur Auswirkung kommenden konzentrierten Kraft ankommt. Ferner werden auf die Kugelkegel- und Hohlkugelprobleme hingewiesen.

Th. Pöschl.

**Lechnickij, S. G.:** Die Spannungsverteilung in einem elastischen Stab mit krummliniger Anisotropie unter der Wirkung einer Zugkraft und Biegemomente. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 307—316 (1949) [Russisch].

The problem treated is that of a uniform beam of arbitrary cross-section whose material has cylindrical anisotropy. This means that either inside or outside the beam there is an axis of anisotropy parallel to the beam axis. The elastic properties of the material are identical in directions parallel to this axis. Moreover, directions normal to it have identical properties. There are no body forces and no external forces on the lateral surfaces. On each end there are stresses that are equivalent to a longitudinal force and to moments about the principal axes of the cross-section. — A stress function is defined and the equations that it must satisfy obtained. A solution is found for a thick-walled circular tube subjected to (a) a longitudinal force acting along the axis of the tube, (b) a bending moment on each end section (with a restricted type of anisotropy). One interesting result is that for certain relations among the Hooke's law coefficients there may be a concentration of stress in the vicinity of the anisotropy axis. It appears in general that the longitudinal stresses do not vary linearly over a cross-section and, moreover, that there exist normal stresses on planes normal to the transverse sections.

White (Massachusetts).

**Sacharov, I. E.:** Ausbiegung eines von Zentrifugalkräften gedehnten Stabes. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 329—330 (1949) [Russisch].

A uniform beam of length  $L$ , originally horizontal, rotates with constant angular velocity  $\Omega$  about a vertical axis at one of its ends. Besides the centrifugal forces there are also acting vertical distributed forces  $f(r)$  including its weight. The equation of equilibrium is  $Bu'''' - [T(r)u']' - f(r)$  where  $B$  is the bending stiffness,

$T$  is the centrifugal force at any section  $r$ , and  $(\cdot)$  denotes differentiation with respect to  $r$ . Two solutions of this equation are obtained. White (Massachusetts).

Ufljand, Ja. S.: **Genaue Lösung des Problems der Verbiegung eines prismatischen Stabes für eine Klasse von unsymmetrischen Querschnitten.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 751—754 (1949) [Russisch].

The author considers beams of uniform cross-section having the shape of the area between two intersecting circular arcs, possibly of unequal radii. The  $y$ -axis is the symmetry axis and the  $x$ -axis passes through the meeting points of the arcs. The loading is a transverse force  $P$  with arbitrary orientation in the plane of the section. It acts at the center of twist, the location of which is the immediate object of the investigation. A stress-function  $\varphi$  is defined that somewhat resembling Timoshenko's flexure function [Timoshenko, Theory of Elasticity, New York, London 1934, Ch. X]. The author introduces bipolar coordinates  $\alpha, \beta$  defined by  $x + iy = a \operatorname{Tanh} \frac{\alpha + i\beta}{2}$  so that  $\beta = \beta_1, \beta_2$  (constants) describe the two curved boundaries of the section. The stress function becomes

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{6} [A(y-y_0)^3 - Bx^3] + a^3 f(\alpha, \beta) \right\} \quad \text{with} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0,$$

in which  $\nu$  = Poisson's ratio,  $A = P_x/I_y$ ;  $B = P_y/I_x$ ;  $I_x, I_y$  are moments of inertia;  $2a$  is the width of the section (in the  $x$ -direction). The centroid of the section has coordinates  $(0, y_0)$ . — The function  $f(\alpha, \beta)$  is found from the above equations and the condition that the shearing stresses at the boundary of the section be parallel to the boundary. Two special cases are solved: (1) One boundary is straight and  $P$  is parallel to it. The location of the center of twist is found for a series of shapes in which the total angle of the arc ranges from  $60^\circ$  to a complete circle. Incidentally, the result for the semi-circle agrees closely but not exactly with that given by Timoshenko (loc. cit. p. 301). (2) In the second case investigated the two arcs are of equal and opposite curvature, giving a doubly symmetrical lens-shaped cross-section.

White (Massachusetts).

Flügge, W. und K. Marguerre: **Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben.** Ingenieur-Arch. 18, 23—38 (1950).

Der Querschnitt der Wandmittelfläche wird Skelettkurve genannt und ihre Bogenlänge mit  $s$  bezeichnet. Die Längskoordinate wird mit  $x$ , die Längsverschiebung mit  $u$ , die Verschiebung in der Skelettkurvenrichtung mit  $v$  und die Dicke mit  $t$  bezeichnet. Im Querschnitt greifen, auf die Längeneinheit der Skelettkurve bezogen, die Normalkraft  $S = Et \partial u / \partial x$  und die Schubkraft  $T = Gt \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$  an. Die an einem Wandstück angreifenden Längskräfte halten sich das Gleichgewicht:  $\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} = 0$ . Der Differentialquotient der waagerechten Verschiebung, der lotrechten Verschiebung und der Drehung eines Querschnitts nach  $x$  wird mit  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\vartheta$ , der Steigungswinkel der Skelettkurventangente mit  $\beta$  und ihr Abstand von der Drehachse mit  $r$  bezeichnet. Aus der Starrheit der Querschnitte folgt

$$\partial v / \partial x = \alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta + \vartheta r.$$

Durch Elimination:

$$G \frac{\partial}{\partial s} \left\{ t \frac{\partial u}{\partial s} \right\} + Et \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -G \frac{\partial}{\partial s} \{ t (\alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta + \vartheta r) \}.$$

Der Ansatz

$$u = u_n \{s\} e^{-\mu_n x} \quad \alpha_1 = \alpha_{1n} e^{-\mu_n x} \quad \vartheta = \vartheta_n e^{-\mu_n x}$$

führt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Für die beiden Integrationskonstanten in  $u_n$ , für  $\alpha_{1n}$  und  $\vartheta_n$  gelten die folgenden linearen, homogenen Gleichungen:

chungen. Waagerechte Querkraft  $\int T \cos \beta ds = 0$ . Lotrechte Querkraft  $\int T \sin \beta ds = 0$ . Torsionsmoment  $\int Tr ds = 0$ ; bei offenem Querschnitt kommt zu dem Wölbanteil der St.-Venantsche Anteil  $\frac{G \theta}{3} \int t^3 ds$ . Bei offenem Querschnitt ist in Endpunkten der Skelettkurve  $T = 0$ . Wenn bei geschlossenem Querschnitt der Umfang der Skelettkurve mit  $s_1$  bezeichnet wird, ist  $u\{s_1\} = u\{0\}$  und  $T\{s_1\} = T\{0\}$ . Lösung des Eigenwertproblems für den  $\perp$ -Querschnitt und für das Rechteckrohr ohne und mit Eckgurten. *Konrad Ludwig* (Hannover).

**Vedeler, Georg:** Basic function for beams with arbitrary constraint. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **22**, Nr. 37, 171—177 (1950).

Zur Lösung bestimmter Probleme in der Elastizitätstheorie fest eingespannter Balken werden trigonometrische Reihen der Form  $\Sigma a_n \varphi_n$  benutzt, wo in  $\varphi_n = \sin \alpha_n x$  die  $\alpha_n$  durch die Randbedingungen bestimmt sind. Verf. verallgemeinert die Reihenentwicklung dadurch, daß er auf feste Einspannung an den Balkenenden verzichtet und an ihre Stelle „lose Einspannung“ setzt, die durch eine Zahl  $f$  definiert ist:  $f$  ist das Verhältnis zwischen dem an dem betreffenden Ende tatsächlich vorhandenen Biegemoment (bending moment) zu jenem, das herrschen würde, wenn beide Enden fest eingespannt wären. Verf. zeigt, daß man auch in diesem Fall zu einem Eigenwertproblem kommt, allerdings mit einer Differentialgleichung vierter Ordnung, und bestimmt die zugehörigen Eigenfunktionen als Linearkombinationen von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Die Formeln für die Koeffizienten in der Reihenentwicklung, also die Fourierkoeffizienten werden angegeben. *Hardtwig* (München).

**Hetényi, M.:** A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *J. appl. Phys., Lancaster Pa.* **21**, 55—58 (1950).

Wenn ein Fundament längs einer Strecke  $b$  einen konstanten Druck  $q$  trägt, wird entweder nach E. Winkler und H. Zimmermann angenommen, daß die Senkung innerhalb der belasteten Strecke gleich einem konstanten Werte  $\delta_1$  und außerhalb  $= 0$  ist, oder das Fundament wird elastisch angenommen; dann hat die Senkung in der Mitte der belasteten Strecke einen größten Wert  $\delta_2$  und in einem Abstände  $d$  den Wert 0. Verf. vereinigt beide Annahmen dadurch, daß er das Fundament aus einem Stabe mit der Biegesteifigkeit  $EI_2$ , einer darüberliegenden Schicht mit der Bettungskonstanten  $k_1$  und einer darunterliegenden Schicht mit der Bettungskonstanten  $k_2$  zusammensetzt:  $k_1 = \frac{q}{\delta_1}$ ,  $k_2 = \frac{3}{8} \pi \frac{qb}{\delta_2 d}$ ,  $EI_2 = \frac{8}{27 \pi^3} \frac{qb d^3}{\delta_2}$ . Auf diesem Fundament liege ein Stab mit der Biegesteifigkeit  $EI_1$ . Seine Senkung wird mit  $y_1$  und die des Stabes im Fundament mit  $y_2$  bezeichnet. Die gekoppelten Differentialgleichungen

$$EI_1 y_1^{IV} = -k_1 y_1 + k_1 y_2 \quad EI_2 y_2^{IV} = k_1 y_1 - \{k_1 + k_2\} y_2$$

haben mit den Abkürzungen

$$\alpha = \left\{ \frac{k_1}{EI_1} + \frac{k_1 + k_2}{EI_2} \right\} / 2E \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{k_1 k_2}{EI_1 EI_2}} \quad \lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{\alpha \pm \beta}{4}}$$

das allgemeine Integral

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \{C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x\} + e^{-\lambda_1 x} \{C_3 \cos \lambda_1 x + C_4 \sin \lambda_1 x\} \\ + e^{\lambda_2 x} \{C_5 \cos \lambda_2 x + C_6 \sin \lambda_2 x\} + e^{-\lambda_2 x} \{C_7 \cos \lambda_2 x + C_8 \sin \lambda_2 x\};$$

$y_2$  entsteht aus  $y_1$  dadurch, daß die ersten beiden Summanden den Faktor  $1 - \{\alpha + \beta\} EI_1 / k_1$  und die letzten beiden den Faktor  $1 - \{\alpha - \beta\} EI_1 / k_1$  erhalten. Der obere Stab habe die Länge  $2c$  und trage in der Mitte die Punktlast  $P$ . Der untere Stab werde unter den Enden des oberen durchgeschnitten. In den Schnitten greife eine lotrechte Kraft  $P_0$  und ein Moment  $M_0$  an. Für diese Belastungen sind die Integrationskonstanten berechnet. Das einseitig begrenzte Fundament erfährt mit



$\lambda = \sqrt[4]{k_2/4EI_2}$  die Senkung

$$y_2 = 2 (\lambda/k_2) P_0 e^{-\lambda x} \cos \lambda x - 2 (\lambda^2/k_2) M_0 e^{-\lambda x} \{\cos \lambda x - \sin \lambda x\}.$$

$P_0$  und  $M_0$  müssen aus der Stetigkeit der Senkung und der Steigung berechnet werden.  
Schrifttum.

Konrad Ludwig (Hannover).

Vedeler, Georg: The critical load of columns with arbitrary end constraint.

Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 38, 178—182 (1950).

Ein geradliniger Balken wird durch eine konstante Kompressionskraft  $P$  in axialer Richtung belastet und unterliegt an den Enden  $A$  und  $B$  (mit  $AB = 1$ ) den Biegemomenten (bending moments)  $M_A$  und  $M_B$ . Gefragt wird nach der kritischen Belastung  $P_k$  bei beliebigem „Einspannungsgrad“ der Balkenenden. Verf. geht von der entsprechenden Differentialgleichung 2. Ordnung aus und findet für die kritische Belastung  $P = c \cdot \pi^2 E J / l^2$ . ( $E$  = Elastizitätsmodul,  $J$  = Trägheitsmoment,  $l$  = Balkenlänge.) Der entscheidende Faktor  $c$  ist von der Form  $c = [(1,5 - m_A^0)(1,5 - m_B^0)] / (1,5 + m_A^0)(1,5 + m_B^0)$ , wo  $m_A^0$ ,  $m_B^0$  die „Übertragungsfaktoren“ von  $B$  nach  $A$  bzw. von  $A$  nach  $B$  bedeuten (carry-over factors), wenn die Axialkraft nicht vorhanden wäre (daher der obere Index Null). Es ist z. B.  $m_B$  jener Wert von  $M_B$ , der dann eintritt, wenn  $M_A = I$  gemacht wird. Weniger genau ist die Annäherung  $|c| = (1,5 - m) / (1,5 + m)$  mit  $m = \frac{1}{2} \cdot (m_A^0 + m_B^0)$ . Die Größen  $m_A^0$  und  $m_B^0$  sind mit den an den Enden  $A$  und  $B$  herrschenden „Fixierungsgraden“  $f_A$  bzw.  $f_B$  verbunden durch die Beziehungen  $m_A^0 = f_A / (f_B - 3)$ ,  $m_B^0 = f_B / (f_A - 3)$ , so daß  $c$  und damit auch die kritische Belastung durch  $f_A$  und  $f_B$  ausgedrückt werden können. Der Fixierungsgrad ist definiert durch das Verhältnis von tatsächlichem Biegemoment an dem betreffenden Ende zu jenem Biegemoment, das (bei sonst gleicher Last) dann vorhanden wäre, wenn beide Enden streng fixiert wären.

Hardtwig (München).

Kauderer, H.: Über ein nicht-lineares Elastizitätsgesetz. Ingenieur-Arch. 17, 450—480 (1949).

Die von A. Philippidis (dies. Zbl. 29, 82) und C. Weber (dies. Zbl. 30, 279 und 33, 225) kürzlich aufgestellten nicht-linearen Elastizitätsgesetze

$$|\mathfrak{P}|/|\mathfrak{E}| = \varphi(|\mathfrak{E}|), \quad \mathfrak{P}'_i \mathfrak{E}'_i = \psi(|\mathfrak{E}'|^2)$$

( $|\cdot|$  bedeutet die Spur, der Akzent den Deviator des Spannungstensors  $\mathfrak{P}$  bzw. des Verzerrungstensors  $\mathfrak{E}$ ,  $(\mathfrak{E}')^2$  die Quadratsumme der Komponenten von  $\mathfrak{E}'$ ), wo  $\varphi$ ,  $\psi$  Materialfunktion sind, die die elastischen Konstanten verallgemeinern, wird hier unter Annahme infinitesimaler Formänderungen auf Grund folgender Forderungen an das elastische Verhalten wiedergewonnen: 1. die Formänderungsarbeit  $A$  ist eine eindeutige und zugleich mit  $\mathfrak{E}$  verschwindende Funktion der Verzerrungen, 2. bei der hier vorliegenden Beschränkung auf isotrope Stoffe hängt  $A$  nur von den Invarianten  $J_\nu$  von  $\mathfrak{E}$  ab, 3.  $A$  setzt sich additiv zusammen aus einem nur von  $|\mathfrak{E}|$  und einem nur von  $\mathfrak{E}'$  abhängigen Anteil, 4. das aufzustellende Elastizitätsgesetz soll für jeden Verzerrungstensor  $k \mathfrak{E}$  mit  $k \rightarrow 0$  in das Hookesche Gesetz übergehen. — Es wird benutzt, daß bei isothermen infinitesimalen Formänderungen die Spannungskomponenten gegeben sind durch die partiellen Ableitungen von  $A(J_1, J_2, J_3) = A_1(J_1) + A_2(J_2, J_3)$  nach den gleichstelligen Komponenten von  $\mathfrak{E}$ . Dann ergibt sich, daß das elastische Verhalten vollständig bestimmt ist durch die Funktion  $dA_1/dJ_1$  und  $dA_2(J_2)/dJ_2$ , da  $A_2$  von  $J_3$  nicht abhängt. — In einfachen Belastungsfällen gestatten die Grundgleichungen mit dem hier abgeleiteten nicht linearen Elastizitätsgesetz bei gegebenen Funktionen  $\varphi$ ,  $\psi$  eine exakte Lösung, z. B. bei hydrostatischem Spannungszustand, einachsigen Zug (Druck), Überlagerung von beiden, und reinem Schub. Die Möglichkeit der experimentellen Bestimmung der Materialfunktionen  $\varphi$ ,  $\psi$  wird erörtert. Die genauere Untersuchung der Beanspruchung durch reine Biegung zeigt, daß bei nicht linearem Elastizitätsgesetz in allen Stabquerschnitten drei Normalspannungen und Schubspannungen in der

Ebene senkrecht zur Balkenachse auftreten. Bei der Biegung eines zylindrischen Stabes mit elliptischem Querschnitt ist die Rechenarbeit bereits beträchtlich. Für den Fall der Torsion führt der übliche Ansatz, daß alle Spannungskomponenten mit Ausnahme von  $\tau_{yz}(x, y)$  und  $\tau_{zx}(x, y)$  verschwinden, auf eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spannungsfunktion, so daß man sich hier in konkreten Fällen im allgemeinen mit Näherungslösungen begnügen muß.

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Carrier, G. F.:** On dynamic structural stability. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua.) 175—180 (1949).

Verf. behandelt das Stabilitätsverhalten elastischer Körper unter der Einwirkung zeitlich veränderlicher äußerer Kräfte. Da die kritischen Kraftbeträge bei dynamischer Beanspruchung u. U. kleiner ausfallen können als in den vielfach durch einfache Formeln erfaßbaren statischen Belastungsfällen, kommt diesem Problem für die technische Praxis eine besondere Bedeutung zu. Verf. gewinnt die erforderlichen Beziehungen durch Erweiterung des allgemeinen Gleichungssystems der statischen Stabilität elastischer Körper und gelangt zu Ergebnissen, die im wesentlichen mit jenen von W. Prager (dies. Zbl. 32, 222) im Einklang stehen. — Etwas weitgehend wird das Problem in der inzwischen erschienenen Arbeit von E. Mettler (dies. Zbl. 35, 117) diskutiert. (Bem. d. Ref.)

*H. Neuber* (Dresden).

**Laurent'ev, M. A. und A. Ju. Islinskij:** Dynamische Formen des Verlustes der Stabilität elastischer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 779—782 (1949) [Russisch].

The author discusses the behavior under dynamic loads of elastic systems that are capable of instability under static loads. In general, such a system has many characteristic modes of unstable deformation, only one of which, that requiring the smallest force, is normally produced under static loading (e. g. an Euler column). With dynamic loads the situation is different. If an Euler column (possibly with initial curvature) is subjected to a sudden compression force greater than its lowest critical load, the resulting motion consists of buckling in the modes whose critical loads are smaller than the applied compression, and oscillations of the remaining modes. The rate of loss of stability (rate of growth of amplitude) is determined for each of the unstable modes that are excited. The maximum rate does not necessarily occur in the lowest mode. — The author gives two examples, both also studied experimentally by explosive loading: (1) an Euler column with simply supported ends and (2) a cylindrical pipe under outside radial pressure.

*White.*

**Rozovskij, M. I.:** Der Stoß eines Zylinders auf die Oberfläche eines Mittels, dessen mechanische Eigenschaften sich mit der Zeit ändern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 25—28 (1948) [Russisch].

The author considers the case of end-on impact of a rigid right cylinder upon the plane surface of a semi-infinite medium. The medium remains elastic during the whole process but shows a time effect in stress-strain relations. Specifically,

$$\sigma_i = \lambda \Theta(t) + 2\mu \varrho_i(t) - \int_0^t [\varphi(t, r) \Theta(r) + 2\psi(t, r) \varrho_i(r)] dr$$

and  $r_{ij} = \mu \gamma_{ij}(t) - \int_0^t \psi(t, r) \gamma_{ij}(r) dr$  with corresponding expressions for the other relations. (The author uses a different notation.) The inertia of the medium is not considered. General expressions are found for force, position of cylinder, displacements, stresses and strains as functions of time, in terms of the constants of the material (including the time functions) and the mass, initial velocity and diameter of the cylinder. A particular example is analyzed in which the time function  $\varphi$  (see

above) is zero. As would be expected, it is found that the motion of the cylinder can be either oscillatory or aperiodic, according to the characteristics of the medium.

White (Massachusetts).

Kupradze, V. D.: Das räumliche Problem der Schwingungen eines elastischen Körpers bei vorgegebenen Verschiebungen auf der Begrenzung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 233—236 (1949) [Russisch].

Der endliche oder unendliche dreidimensionale Bereich  $B$  mit dem aus endlich vielen regulären Flächen bestehenden Rande  $S$  sei erfüllt durch ein dem Hookeschen Gesetz mit den Laméschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  gehorchendes Medium, das sich in harmonischen Schwingungen mit der Frequenz  $\omega$  befindet. Der Verschiebungsvektor  $u \cdot e^{i\omega t}$  genügt der Differentialgleichung (1):  $(\Delta^* + k_2^2)u = 0$  mit  $\Delta^* \equiv \Delta + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad div}$  und  $k_2^2 = \omega^2/\mu$ . Gesucht ist die eindeutig bestimmte Lösung von (1) bei Vorgabe von  $u = \tilde{f}(S)$  längs  $S$ . — Sei  $u_\sigma(P, Q)$  die Lösung von (1) an der Stelle  $P$  für eine in  $Q$  in  $x_\sigma$ -Richtung pulsierende Quellstörung, so bilden die  $u_\sigma$  die Spalten einer symmetrischen Matrix  $T(P, Q)$  [resp.  $T^0(P, Q)$  bei  $\omega = 0$ ]. Schreibt man  $\Delta^*$  in Matrixform, so ist  $(\Delta_P^* + k_2^2)T(P, Q) = 0$ . — Für beliebigen Einheitsvektor  $n$  bildet man den Operator  $L$  gemäß:  $Lu = A \partial u / \partial n + B n \cdot \text{div } u + C \cdot n \times \text{rot } u$  mit geeigneten durch  $\lambda$  und  $\mu$  bestimmten Konstanten  $A, B$  und  $C$ . Schreibt man  $L$  als Matrix, so wird die Gespiegelte  $T^*(P, Q)$  zu  $L_P T(P, Q)$  ebenfalls durch  $\Delta^* + k_2^2$  annulliert.  $V(P) = \iint_S T(P, Q) a(Q) ds_Q$  heißt einfache Quellschicht und  $W(P) = \iint_S T^*(P, Q) b(Q) ds_Q$  heißt Doppelquellschicht mit den resp. Belegungsstärken  $a(Q)$  und  $b(Q)$ ;  $ds$  = Flächenelement von  $S$ . — Der Versuch, zur Darstellung von  $u$  mit einer Doppelquellschicht auszukommen, führt auf die Fredholmsche Integralgleichung (2):  $\pm b(Q) + \iint_S T^*(P, Q) b(Q) ds_Q = \tilde{f}(P)$  für  $P \in S$ , die lösbar ist, falls  $\tilde{f}$  orthogonal ist zu den Lösungen der entsprechenden homogenen Integralgleichung, die aber nach einer früheren Arbeit des Verf. [Trudy Tbilissk. gosud. Univ. Stalin 26a (1944)] durch eine einfache Quellschicht dargestellt werden können. Damit wird schließlich:

$$u(P) = \iint_S \{T^*(P, Q) b(Q) - T(P, Q) a(Q)\} ds_Q.$$

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Bouwkamp, C. J.: On the evaluation of certain integrals occurring in the theory of the freely vibrating circular disk and related problems. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 987—994 (1949); Indag. math., Amsterdam 11, (1949).

Bei Untersuchung der Schallausbreitung von einer frei schwingenden kreisförmigen Scheibe begegnet man dem Doppelintegral:

$$I_{n,m}(p) = \int_0^1 P_{2n+1}(\sqrt{1-p'^2}) p' dp' \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p^2 - 2pp' \cos \vartheta' + p'^2]^{(m-1)/2} d\vartheta',$$

wobei  $n, m$  positive ganze Zahlen sind und  $0 \leq p \leq 1$ . Zweck vorliegender Arbeit ist das Integral in Abhängigkeit von bekannten Funktionen auszuwerten. Verf. wendet zunächst den elektrostatischen Satz:  $\varphi(p') = \lim_{z \rightarrow +0} (-\partial V / \partial z)$ , auf die Po-

tentialfunktion,  $V = 1/2\pi \iint \varphi(p') p' dp' d\vartheta' / r$ , an und erhält

$$I_{n,0}(p) = \frac{1}{2} (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(1/2) \Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+2) \Gamma(-n+1/2)} \cdot F(-n-1, n+1; 1; p^2).$$

Eine einfache Integration ergibt:

$$I_{n,m}(0) = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(m/2+1/2) \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(m/2+n+2) \Gamma(m/2-n+1/2)}.$$



Mittels der Rekursionsformel (welche durch ein geschicktes Limesverfahren bewiesen wird), nämlich  $(m+1)^2 I_{n,m}(p) = 1/p, \partial/\partial p (1/p \partial/\partial p) I_{n,m+2}$  erhält er ferner

$$I_{n,-2}(p) = \frac{1}{2} (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(-1/2) \Gamma(-1/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+1) \Gamma(-n-1/2)} F\left(-n, n + \frac{3}{2}; 1; p^2\right).$$

Danach wird die gesuchte Formel:

$$I_{n,m}(p) = \frac{1}{2} (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(m/2+1/2) \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(m/2+n+2) \Gamma(m/2-n+1/2)} \cdot F\left(-n - \frac{m}{2} - 1, n - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; 1; p^2\right)$$

bestätigt. Für physikalische Zwecke zeigt sich aber eine Reihe wie

$$I_{n,m}(p) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(n, m) \frac{p_{2n+1}(\sqrt{1-p^2})}{\sqrt{1-p^2}}$$

als geeignetere, wobei  $A_v(n, m)$  als von Gammafunktionen abhängig festgestellt werden.

S. C. Kar (Calcutta).

**Galin, M. P.:** Transverse oscillations of a plate. Appl. Math. Mech., Moskau 11, 387—388 u. engl. Zusammenfassg. 388 (1947). [Russisch].

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit werden die erzwungenen Schwingungen einer Rechteckplatte angegeben, die eine zeitlich und örtlich veränderliche Last  $p(x, y, t)$  trägt. Im Sonderfall  $p(x, y, t) = 0$  ergeben sich freie Schwingungen, für die ein Zahlenbeispiel gerechnet wird. Dabei wird eine niedrigste Eigenfrequenz gefunden, die um nur 0,04% von dem genaueren von S. Iguchi [Ingenieur-Arch. 8, 11 (1937)] ermittelten Wert abweicht.

Gran Olsson.

**Dimentberg, F. M.:** Über die Transversalschwingungen eines Stabes mit verteilter Masse bei Vorhandensein eines Widerstandes. Prikl. Mat. Mech., Moskva 13, 51—54 (1949). [Russisch].

In der Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, das die Widerstände bei der Ermittlung der Eigenschwingungen eines Stabes mit verteilter Masse und der Amplitude der Auslenkung am Stabende unter der Einwirkung einer harmonischen Erregung berücksichtigt. Gleichzeitig wird auf eine Eigenschaft des Spektrums der Eigenschwingungen bei Anwesenheit von inneren Widerständen hingewiesen. Außerdem wird eine anschauliche geometrische Deutung der Änderung der dynamischen Steifigkeit des Stabes gegeben.

Gran Olsson (Trondheim).

**Cambi, Enzo:** Verifica sismica di massima di una torre metallica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 608—614 (1949).

Un problema tecnico, opportunamente schematizzato, conduce allo studio delle vibrazioni di una trave suddivisibile in tronchi con momento di inerzia variabile secondo la legge  $J = K(1 - \gamma x)^2$  ( $x$  ascissa corrente dei punti della trave,  $k$  e  $\gamma$  costanti, la prima però diversa da tronco a tronco) incastrata ad un estremo, l'altro estremo unito rigidamente ad una massa nota. L'A. prova che gli spostamenti dei punti della trave, quando compie oscillazioni libere, si possono esprimere mediante le funzioni di Bessel d'ordine zero di prima e seconda specie e con argomento reale o immaginario puro. Indica poi il metodo per il calcolo degli autovalori. Approfondisce il caso in cui non è necessario dividere la trave in tronchi e un suo estremo è incastrato e l'altro libero, dimostrando che gli autovalori tendono assintoticamente a quelle di una trave con  $J$  costante. Infine determina le vibrazioni forzate della trave soggetta a un carico distribuito variabile sinoidalmente col tempo.

Graffi.

**Riz, P. M.:** Large oscillations of a string under arbitrary initial stretching. Appl. Math. Mech., Moskau 11, 389—390 u. engl. Zusammenfassg. 390 (1947). [Russisch].

In vorliegender Note wird eine Eigentümlichkeit bei der Schwingung einer Saite mit großer Anfangsspannung angegeben. Mit  $k$  als Dehnungssteifigkeit der Saite ( $k = EF$ , wo  $E$  = Elastizitätsmodul,  $F$  = Saitenquerschnitt) und  $T_0$  als Anfangs-

spannung der Saite, wird  $\gamma = (k - T_0)/T_0$  als Parameter eingeführt. Die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird bis  $T_0 = k$  vorausgesetzt. Bezeichnen  $u$  und  $v$  die Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung,  $m$  die Masse der Saite je Längeneinheit ( $\alpha$  den Neigungswinkel der Tangente an die Saite gegen die  $x$ -Achse), und  $R = ds/dx$  ( $ds$  = Länge eines Saitenelements in beliebiger Lage;  $dx$  die entsprechende Länge in Gleichgewichtslage), so lauten die Bewegungsgleichungen  $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \cos \alpha)$ ,

$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (T \sin \alpha)$  mit  $T = T_0 + k \frac{ds - dx}{dx} = T_0 + k(R - 1)$ . Mit  $\sin \alpha = \partial v / R \partial x$ ,  $\cos \alpha = (1 + \partial u / \partial x) / R$  erhält man die Gleichungen

$$\frac{m}{T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \left( 1 + \frac{1}{R} \right) \right], \quad \frac{m}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{T_0}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right].$$

Für  $\gamma = 0$  werden die Gleichungen linear und voneinander unabhängig, während für  $\gamma$  von Null verschieden die Gleichungen wegen  $R$  nicht-linear und gekoppelt sind. Wie Verf. bemerkt, ist der bemerkte Sachverhalt der Linearität vornehmlich von der qualitativen Seite her interessant, weil eine genügend große Anfangsspannung sich kaum verwirklichen läßt, ohne daß man über die Grenzen der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes hinausgeht. — Zum Schluß wird eine Arbeit von M. A. Isakovic [C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 51, 95—98 (1946)] besprochen, wo nach Ansicht des Verf. einige Fehler und Ungenauigkeiten unterlaufen sind. *Gran Olsson*.

**Fridman, M. M.:** Diffraktion einer ebenen, elastischen Welle an einem halb-unendlichen, geradlinigen, spannungsfreien Spalt. Doklady Akad. Nauk SSSR, r. S. 66, 21—24 (1949) [Russisch].

Die Elementarlongitudinalwelle

$$u = -c \cdot s(t - cx + \sqrt{a^2 - c^2} y), \quad v = \sqrt{a^2 - c^2} \cdot s(t - cx + \sqrt{a^2 - c^2} y)$$

bei  $1/a$  = Longitudinalwellengeschwindigkeit,  $1/b$  = Transversalwellengeschwindigkeit,  $0 < c < a$ ,  $s(\xi)$  = Dirichletsche Sprungfunktion, treffe zur Zeit  $t = 0$  auf den spannungsfreien Spalt  $y = 0$ ,  $x > 0$ . Für  $t > 0$  wird der Verschiebungsvektor  $u$  angesetzt in der Gestalt:  $u$  = Longitudinalwellenvektor + Transversalwellenvektor =  $(\operatorname{Re} U_1(\theta_1), \operatorname{Re} V_1(\theta_1)) + (\operatorname{Re} U_2(\theta_2), \operatorname{Re} V_2(\theta_2))$  mit  $t - \theta_1 x - \sqrt{a^2 - \theta_1^2} y = 0$  und  $t - \theta_2 x - \sqrt{b^2 - \theta_2^2} y = 0$ , wo  $U_1$  und  $V_1$  analytische Funktionen in der längs  $\operatorname{Re} \theta_1 > -a$  aufgeschnittenen und entsprechend  $U_2$  und  $V_2$  in der längs  $\operatorname{Re} \theta_2 > -b$  aufgeschnittenen komplexen Ebene sind. — Die Randbedingungen am Spalt führen zu einer Darstellung von  $U'_1, U'_2, V'_1$  und  $V'_2$  durch zwei Funktionen  $U(\theta)$  und  $V(\theta)$ , die bis auf vier Polynome angebbar sind, nebst zwei Funktionen  $\Phi(\theta)$  und  $\Psi(\theta)$ , die die unbekannten Werte von  $U_1$  und  $V_1$  längs  $-b < \operatorname{Re} \theta_1 < -a$  enthalten. Die Forderung der analytischen Fortsetzbarkeit von  $U_1$  und  $V_1$  längs  $-b < \operatorname{Re} \theta_1 < -a$  liefert für  $\Phi$  und  $\Psi$  je eine Gleichung vom Hilbertschen Typus. deren Lösungen wegen des Verschwindens von  $u$  im Unendlichen und des analytischen Charakters von  $U'_1$  und  $V'_1$  im Punkte  $\theta_1 = -b$  eindeutig als Integrale angegeben werden können, wobei sich obige Polynome als lineare Funktionen erweisen, deren Koeffizienten durch die Forderung der Beschränktheit von  $u$  in  $x = 0, y = 0$  und des analytischen Charakters von  $U'_1, V'_1, U'_2$  und  $V'_2$  in  $\theta = 0$  bestimmt werden können. — Es wird bemerkt, daß die gleiche Methode anwendbar ist für die Behandlung der Diffraktion einer ebenen Elementarschubwelle an einem spannungsfreien Spalt, so lange der Einfallswinkel noch keine Totalreflexion nach sich zieht, d. h.  $0 < c < a < b$  gilt.

*Hans Richter* (Haltingen/Baden).

**Lune, Ja. L.:** Über die Ausbreitung sphärischer Wellen in einem elastisch-plastischen Mittel. Prikl. Mat. Mech., Moskva 13, 55—78 (1949) [Russisch].

Betrachtet wird die Ausbreitung der kugelförmigen Wellen in einem elastoplastischen, unendlich ausgedehnten Medium, wenn auf die Oberfläche eines kugelförmigen Loches vom Radius 1 in demselben die Normalspannung  $p(t) < 0$  aus-

geübt wird, welche die Elastizitätsgrenze überschreitet. Das Medium wird charakterisiert durch die Plastizitätsbedingung  $\sigma_i = F(\varepsilon_i)$ , wo  $\sigma_i$  und  $\varepsilon_i$  bzw. Spannungs- und Deformationsintensität sind und das Kompressionsgesetz  $\sigma = 3Ke$  für mittlere Spannung  $\sigma$  und mittlere Dehnung  $e$ ; weiter wird Proportionalität zwischen Spannungs- und Deformationsdeviator angenommen. Die Charakteristiken des entsprechenden Differentialgleichungssystems sind dann im  $r$ - $t$ -Diagramm die zwei Scharen  $dr/dt = \pm a(\varepsilon_i)$  mit  $a(\varepsilon_i) =$  gewöhnlicher Longitudinalwellengeschwindigkeit  $a_0$  bei  $\varepsilon_i$  unterhalb der Fließgrenze. — Besonders betrachtet wird der Fall der Prandtlschen Plastizitätsbedingung, wo neben  $a_0$  nur noch ein  $a_1 < a_0$  als Geschwindigkeit für plastische Wellen auftritt. Bei Konvergenz einer „glatten“ Plastizitätsbedingung gegen die Prandtlsche konvergiert die entsprechende Lösung im Quadratmittel. — Bei monoton wachsendem  $|p(t)|$  gibt es im  $r$ - $t$ -Diagramm einen Bereich  $G_0$  zwischen den Geraden  $r - 1 = a_0 t$  und  $r - 1 = a_1 t$ , wo rein elastische Wellen auftreten, für die die Formeln geschlossen angebar sind. An  $r - 1 = a_1 t$  schließt sich der plastische Bereich  $G_1$  an, für den die Lösung durch Quadraturen ausdrückbar ist bei Beachtung des stetigen Anschlusses an die Lösung in  $G_0$ . Jedoch gilt die Lösung für  $G_1$  längs  $r - 1 = a_1 t$  nur bis zu dem Punkte  $A$ , wo  $\varepsilon_i = \varepsilon_s$  wird. Die Lage von  $A$  in Abhängigkeit von  $p(0)/p_s$  ist für einen idealplastischen Stoff angegeben. Die von  $A$  in Richtung wachsender  $t$  ausgehende Grenze der einfachen Wellenausbreitung kann wegen des Auftretens von Entlastungswellen, für die wieder das rein elastische Gesetz angenommen wird, nur durch schrittweise Charakteristikenintegration gewonnen werden. — Bei  $|p(0)| > |p_s|$  und anschließend abnehmendem Druck auf die Lochoberfläche rückt  $A$  in den Ausgangspunkt, so daß außerhalb von  $G_0$  nur noch Charakteristikenintegration möglich ist. In einem Spezialfall linear abnehmenden  $|p(t)|$  wird diese durchgeführt; die Ergebnisse sind in Tabellen und in einem Diagramm für die Größe der bleibenden Verformung wiedergegeben.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Lenskij, V. S.: Über den elastisch-plastischen Stoß eines Stabes auf ein starres Hindernis. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 165—170 (1949) [Russisch].

Betrachtet wird der Stoß eines homogenen zylindrischen Stabes der Länge  $l$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  gegen ein absolut starres Hindernis, wenn das Spannungs-Dehnungsgesetz im Stab vom Prandtlschen Typus ist mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Festigkeitsmodul  $E_1$ . Die Rechnungen werden in akustischer Näherung (konstante Dichte  $\varrho$ ) durchgeführt, wobei für die elastischen Fronten mit der Geschwindigkeit  $a_0 = \sqrt{E/\varrho}$  und die plastischen Fronten mit der Geschwindigkeit  $a_1 = \sqrt{E_1/\varrho}$  der Impulsatz angesetzt wird. — Beim Zusammentreffen der voraus-eilenden und an der freien Oberfläche reflektierten elastischen Front mit der plastischen Front entsteht eine stationäre Front  $S$  mit stetigem Spannungsanschluß, aber einem Sprung im Deformationszustand entsprechend der Tatsache, daß das Material auf den beiden Seiten von  $S$  verschiedene Spannungs-Dehnungscharakteristik (Verschiebung der Fließgrenze auf der einen Seite von  $S$ ) besitzt; nach den beiden Seiten von  $S$  laufen je nach der Größe von  $v_0$  und dem Verhältnis von  $a_0$  zu  $a_1$  zwei elastische oder eine elastische nebst einer plastischen Front. — Die Entstehung der Fronten und ihrer Durchkreuzungen werden durchgerechnet (im allgemeinen Falle führt dies bis zu 21 verschiedenen Deformations-Spannungszuständen) und die Berührungszeit  $T$  zwischen Stab und Hindernis für die verschiedenen  $v_0$ -Werte ermittelt. — Für  $v_0 < a_0 \varepsilon_s$  ist der Vorgang rein elastisch; für  $a_0 \varepsilon_s < v_0 < 2a_0 \varepsilon_s$  ist die Berührungszeit noch die gleiche; es bildet sich jedoch eine Zone bleibender Deformation aus von der Länge  $2a_1 l/(a_0 + a_1)$ . Für größere  $v_0$ -Werte kann es zu zwei Zonen bleibender Verformung kommen. H. Richter.

Hill, R.: A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 18—28 (1948).



Für den ideal-plastischen Körper wird entsprechend dem Gleichungssystem von Lévy-Mises und der Fließbedingung von Huber-Mises die Arbeit der Spannungen bei gleichen Oberflächengeschwindigkeiten für die wirklich eintretenden Spannungen größer als für irgendein anderes im Gleichgewicht befindliches Spannungssystem, das lediglich der Fließbedingung genügt. Als Anwendungsbeispiel für das hieraus folgende Variationsprinzip wird ein durch Endmomente plastisch deformierter prismatischer Stab behandelt.

H. Neuber (Dresden).

**Gold'nenblat, I. I.:** Einige allgemeine Gesetzmäßigkeiten eines elasto-plastischen Deformationsprozesses. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 1005—1008 (1949) [Russisch].

Sind  $I_1 = g_{ik} \varepsilon^{ik}$  und  $I_2 = \varepsilon_{ik} \varepsilon^{ik}$  die beiden ersten Invarianten des Deformationstensors  $\varepsilon^{ik}$ ,  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  die entsprechenden Invarianten des Spannungstensors  $\sigma^{ik}$ , so gilt unter der Voraussetzung, daß die freie Energie  $F$  außer von der absoluten Temperatur nur von  $I_1$  und  $I_2$  abhängt, für infinitesimale Deformationen:

$$(1) \quad \sigma^{ik} = \frac{1}{3} \Pi_1 g^{ik} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3 \Pi_2 - \Pi_1^2}{3 I_2 - I_1^2}} \cdot (3 \varepsilon^{ik} - I_1 g^{ik}),$$

so daß  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  als Funktionen von  $I_1$  und  $I_2$  zu geben sind. — Da  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  sich aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $F$  berechnen, muß dabei als Integrabilitätsbedingung erfüllt sein:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial I_2} \left( \Pi_1 - I_1 \cdot \sqrt{\frac{3 \Pi_2 - \Pi_1^2}{3 I_2 - I_1^2}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial I_1} \sqrt{\frac{3 \Pi_2 - \Pi_1^2}{3 I_2 - I_1^2}},$$

die im Falle Hookescher Kompressibilität,  $\Pi_1 = A \cdot I_1$ , führt zu:

$$3 \Pi_2 - \Pi_1^2 = f(3 I_2 - I_1^2).$$

Im letzteren Falle läßt sich (1) nach  $\varepsilon^{ik}$  auflösen mit Koeffizienten, die nur von  $\sigma^{ik}$  und seinen Invarianten abhängen; die Integrabilitätsbedingung für  $\varepsilon^{ik}$  liefert dann in der Arbeit angegebene Gleichungen für  $\sigma^{ik}$  in allgemeinen Koordinaten, zu denen noch die Gleichgewichtsbedingungen treten. — Unter Berufung auf L. M. Kačanov [Mechanik plastischer Mittel, Moskau-Leningrad 1948] wird die Anwendbarkeit von (1) auch für plastische Stoffgesetze behauptet, obwohl die in (1) enthaltene Koaxialität von  $\sigma^{ik}$  und  $\varepsilon^{ik}$  im allgemeinen nur bei einartiger Beanspruchung garantiert sein wird.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

**Gold'nenblat, I. V.:** Über die Gleichungen für das Gleichgewicht eines plastischen Mittels. Prikl. Mat. Mech., Moskva 13, 113—114 (1949) [Russisch].

Inhaltlich im wesentlichen ein Auszug aus vorsteh. besprochener Arbeit unter Beschränkung auf das Mises-Henckysche Stoffgesetz bei einartigen Deformationen.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

**Hill, R.:** Plastic distortion of non-uniform sheets. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys. London, VII. S. 40, 971—983 (1949).

Es wird die plastische Dehnung einer flachen, ebenen Lamelle von veränderlicher Dicke durch Kräfte untersucht, die längs ihres Randes in ihrer eigenen Ebene übertragen werden, durch die die Dicke der Schicht verändert wird. Gesucht wird die „charakteristische Richtung“, die sich aus den elastischen Gleichungen in Verbindung mit einer Fließbedingung ergibt. Die Fließbedingungen werden in der von O. Mohr, von R. v. Mises und von Lévy angegebenen Form angenommen. Als besonderes Beispiel wird die Erweiterung eines kreisförmigen Loches in einer kreisförmigen Lamelle unter radialem Zug betrachtet.

Th. Pöschl.

**Hill, R.:** The theory of plane plastic strain for anisotropic metals. Proc. R. Soc. London, A 198, 428—437 (1949).

Für anisotrope Metalle, die ebenen Deformationen unterworfen werden, werden ein Fließkriterium und die daraus folgenden Spannungs-Dehnungs-Gleichungen formuliert. Die erhaltenen Gleichungen sind vom hyperbolischen Typus, ihre charakteristischen Richtungen fallen mit den größten Gleitrichtungen zusammen. Die Anisotropie

wird als durch eine bevorzugte Orientierung der Kornstruktur begründet angenommen. Wenn sie gleichförmig verteilt ist, dann werden die Änderungen der Charakteristiken durch elliptische Funktionen ausgedrückt und diese zeigen ähnliche geometrische Eigenschaften wie sie bei isotropen Stoffen durch Hencky gefunden wurden. Anwendung der Theorie auf die Wirkung eines flachen Stempels auf einen anisotropen Halbraum.

*Th. Pöschl (Karlsruhe).*

**Sokolovskij, V. V.: Das ebene Problem der Plastizitätstheorie, betreffend die Spannungsverteilung um eine Öffnung.** Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 159—164 (1949) [Russisch].

Für plastische ebene Deformationen ( $\varepsilon_z = 0$ ) wird die St. Venantsche Fließbedingung befriedigt durch den Ansatz (1):

$$\sigma_x + \sigma_y = 4k \cdot \omega(x, y), \quad \sigma_x - \sigma_y = 2k \cdot \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = k \cdot \sin 2\varphi,$$

wo  $2k$  die Fließgrenze und  $\varphi(x, y)$  der Winkel zwischen einer Hauptspannungsrichtung und der  $x$ -Achse ist. Mit  $\omega$  und  $\varphi$  als unabhängigen Variablen erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Größen  $X = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$  und  $Y = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  das hyperbolische System (2):  $X_\omega + Y_\varphi - X = 0$ ,  $Y_\omega + X_\varphi + Y = 0$ , als dessen Lösung Fourier-Reihen nach  $\varphi$  angesetzt werden. — Für eine Öffnung mit dem konvexen Rande  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$ ,  $dy/dx = \tan \alpha$ , sei vorgeschrieben:  $\sigma_n = -k p$  mit  $p > 0$ ,  $\tau_n = 0$ . Es ist dann am Lochrande  $\varphi = \alpha$ , womit  $X = X(\alpha)$  und  $Y = Y(\alpha) = -X'(\alpha)$  am Lochrande bekannt

sind. Weiter ist dort  $2\omega = 1 - p$ . Setzt man  $X(\alpha) = X_0 + \sum_1^\infty X_n \cos(n\alpha + c_n)$ , so erhält man durch Vergleich mit oben genannten Fourierreihen als Lösung in der Umgebung des Randes (3):  $X = X_0 e^{\omega_1} - \sum_1^\infty n X_n \sin(m\omega_1 - \varepsilon_n) \cos(n\varphi + c_n)$ ,

$$Y = \sum_1^\infty n X_n \cos m\omega_1 \cdot \sin(n\varphi + c_n) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_n = \arcsin 1/n, \quad m = \sqrt{n^2 - 1},$$

$2\omega_1 = 2\omega - 1 + p$ . — Durchrechnung eines einfachen Beispiels. — Für plastischen ebenen Spannungszustand ( $\sigma_z = 0$ ) gilt (1) mit der Lösung (3) in einer Zone I um das Loch, wo  $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \leq 0$  ist. An Zone I schließt sich an eine Zone II mit  $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \geq 0$ , wo die Fließbedingung befriedigt wird durch den Ansatz (4):  $\sigma_x + \sigma_y = 4k\kappa \cdot (1 - \chi)$ ,  $\sigma_x - \sigma_y = 4k\chi \cdot \cos 2\varphi$ ,  $\tau_{xy} = 2k\chi \cdot \sin 2\varphi$  mit  $\kappa = \text{sign } \sigma_x$ . Die Lösung des entsprechenden Differentialgleichungssystems lautet (5):  $X = \chi^{-1} \cdot \Phi(\varphi) + Y'(\varphi)$ ,  $Y = Y(\varphi)$  für  $\kappa = +1$  und analog für  $\kappa = -1$ . Die Grenze zwischen den beiden Zonen ergibt sich aus (3) mit  $\omega = \kappa/2$ . Die Lösung (3) wird dann stetig fortgesetzt gemäß (5), wobei auf der Grenzlinie  $\chi = 1/2$  ist.

*Hans Richter (Haltingen/Baden).*

**Sokolovskij, V. V.: Gleichungen des plastischen Gleichgewichts im ebenen Spannungszustand.** Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 219—221 (1949) [Russisch].

Für plastisches Material im ebenen Spannungszustand ( $\sigma_z = 0$ ) wird die Misesche Fließbedingung (1):  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2$  befriedigt durch den Ansatz

$$(2): \sigma_x + \sigma_y = 2\sigma_s \cdot \cos \omega, \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \omega \cdot \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \omega \cdot \sin 2\varphi \quad \text{mit}$$

$0 \leq \omega(x, y) \leq \pi$ ;  $\varphi(x, y)$  charakterisiert die Hauptspannungsrichtungen. Bei Wahl von  $\omega$  und  $\varphi$  als unabhängige Variable ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ein System partieller Differentialgleichungen für

$$p = (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) \sqrt{\sin \omega} \exp \frac{\omega \sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad q = (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sqrt{\sin \omega} \exp \frac{-\omega \sqrt{3}}{2},$$

das für  $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$  von hyperbolischem, sonst von elliptischem Typus ist. — Wählt man im elliptischen Falle an Stelle von  $\omega$  ein passendes  $s(\omega)$  als Variable, so bekommt das Differentialgleichungssystem die Gestalt:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + S(s) \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial p} - S(s) \frac{\partial p}{\partial s} = 0$$

mit einer in Parameterform angebbaren Funktion  $S(s)$ . — Auf analoge Weise gelangt man im hyperbolischen Falle zu dem System

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} + T \left( \frac{\xi + \eta}{z} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \eta} - T \left( \frac{\xi + \eta}{z} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0,$$

das die Geraden  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  als Charakteristiken besitzt bei  $\xi = s + \varphi$  und  $\eta = s - \varphi$  mit passendem  $s = s(\omega)$ . *H. Richter* (Haltingen).

**Sokolovskij, V. V.:** Über das ebene Problem der Plastizitätstheorie. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **13**, 391—400 (1949) [Russisch].

Behandelt wird ein vollplastisches Material im zweidimensionalen Spannungszustand, das der speziellen Fließbedingung  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2k} = \sin \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2k} + \frac{H}{k} \right)$  in  $-2H \leq \sigma_1 + \sigma_2 \leq -2H + k \cdot \pi$  mit Konstanten  $H$  und  $k$  genügt. Setzt man  $\sigma_1 + \sigma_2 + 2H = 4k \cdot \varphi$  und ist  $\varphi$  der Winkel zwischen der  $\sigma_1$ -Richtung und der  $x$ -Achse, so werden die Charakteristiken in diesem Falle Gerade mit den Parametern  $\xi = \psi + \varphi$  und  $\eta = \psi - \varphi$ . Entsprechend lautet die allgemeine Lösung für den Gleichgewichtszustand:  $x \sin \xi - y \cos \xi = \lambda(\xi)$ ,  $x \sin \eta + y \cos \eta = \mu(\eta)$  mit willkürlichen Funktionen  $\lambda(\xi)$  und  $\mu(\eta)$ . — Die Lösung für die Umgebung eines konvexen Loches, auf dessen Rand ein Normaldruck vorgegeben ist, wird damit explizit angebar, gilt jedoch nur bis zur Grenzkurve  $\psi = \pi/4$ . — Nicht diskutiert wird die Möglichkeit von Charakteristikenüberschneidungen und das damit verbundene Auftreten von Spannungsdiskontinuitätslinien. Aus diesem Grunde erscheint Ref. vor allem die anschließend durchgeführte Lösung für den Spannungszustand in einem Rechteck, bei dem auf zwei gegenüberliegenden Seiten ein Druck vorgegeben ist, nicht als überzeugend. *Hans Richter* (Haltingen/Baden).

**Sevčenko, K. N.:** Angenäherte Lösung des ebenen elasto-plastischen Problems mit Axialsymmetrie in geschlossener Form. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **13**, 323—328 (1949) [Russisch].

The author considers the elastic-plastic behavior of a thick-walled cylinder with internal and/or external pressure. There is no axial strain. The material of the cylinder shows strain hardening and is compressible. — Together with the equations of equilibrium and compatibility, the author uses three plasticity equations of the form  $\epsilon_r = \frac{\alpha \sigma}{2G} + \frac{\psi}{2G} (\sigma_r - \sigma)$  where  $\alpha = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$ ,  $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)$  and  $\psi$  is a function that is equal to unity in the elastic state and increases in value with increasing plastic deformation. (Apparently,  $\psi/G$  = shearing strain/shearing stress in simple tension or compression.) With a number of approximations (constant rate of strain hardening, neglect of small quantities, etc.) the author obtains a closed solution of the problem. This solution is compared with that found with the usual assumptions of ideal plasticity (constant yield stress, no compressibility). Some of the errors introduced by neglecting small quantities during the analysis are evaluated and found to be negligible in the case of a typical material. *White*.

**Drucker, D. C.:** Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quart. appl. Math.* **7**, 411—418 (1950).

Verf. untersucht im Anschluß an einen Vortrag von W. Prager (dies. Zbl. **34**, 266) und an die von diesem angegebenen Begriffsbildungen das Problem der Dehnungshärtung (work-hardening) und zeigt, daß die Verbindung dieses Begriffs mit dem der idealen Plastizität Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von der Mises-Pragerschen Form  $d\epsilon_{ij} = \lambda (\partial f / \partial \sigma_{ij})$  mit  $\lambda = G (\partial f / \partial \sigma_{kl}) d\sigma_{kl}$  verlangt, wobei  $G$  und die Spannungsfunktion  $f$  von der Spannung, der plastischen Dehnung und der Vorgeschichte abhängen. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Užik, G. V.:** Theorie der Tragfähigkeit eines Metalls. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **68**, 61—64 (1949) [Russisch].

Unter der Tragfähigkeit metallischer Konstruktionsteile wird ihr Vermögen



verstanden, unter Zulassung lokaler Plastizierung Spannungskonzentrationen auszuhalten, die durch tief eingeschnittene Kerben mit sehr kleinem Krümmungsradius am Grund der Kerbe entstehen. In früheren Arbeiten des Verf. [Izvestija Akad. Nauk SSSR, OTN, Nr. 10 (1949) und Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, (1949)] war hierfür das Verhältnis von Bruchfestigkeit  $R_\sigma$  zur Fließgrenze  $\sigma_s$  als charakteristische Materialkonstante ermittelt worden. — In vorliegender Arbeit wird die Änderung der gerade zum Bruch führenden Spannung  $P_{\text{crit}}$  für Zylinder mit ringförmiger Kerbe behandelt, wenn durch Oberflächenbehandlung  $\sigma_s$  bis zu einer gewissen Tiefe  $t$  auf  $\sigma'_s$  vermindert wird unter Beibehaltung von  $R_\sigma$ . — Ergebnisse: Sei  $P_0$  der Wert von  $P_{\text{crit}}$  ohne Oberflächenbehandlung, dann ist bei vorgegebenem Werte für  $\sigma'_s/\sigma_s < 1$   $P_{\text{crit}}$  eine von  $P_0$  ausgehend zunächst wachsende und später fallende Funktion von  $t$ , die bei kleinem  $\sigma'_s$  sogar unter  $P_0$  sinkt. Bei festem  $t$  wächst  $P_{\text{crit}}$  mit  $\sigma'_s/\sigma_s$ ; doch wird das Diagramm nach oben abgeschnitten durch eine Grenzkurve, die dem Bruch in der oberflächenbehandelten Zone entspricht, so daß zu jedem  $t$  ein optimales  $\sigma'_s/\sigma_s$  gehört, das mit wachsendem  $t$  von 1 auf einen Grenzwert  $> 0$  sinkt. Quantitativ hängen die Kurven noch ab von dem ursprünglichen  $R_\sigma/\sigma_s$  und den geometrischen Daten von Zylinder und Kerbe. Beim Zylinderradius = 9, Kerbtiefe = 4, Krümmungsradius am Kerbgrunde = 0,3 und  $R_\sigma/\sigma_s = 1,5$  liegt das absolute Optimum bei  $\sigma'_s/\sigma_s = 0,4$  mit  $t = 2$ , und man erreicht durch die Oberflächenbehandlung nahezu eine Verdopplung der Tragfähigkeit.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Popov, E. P.: Bending of beams with creep. J. appl. Phys., Lancaster Pa., 20, 251—256 (1949).

Es wird eine Methode zur schrittweisen Berechnung der Spannungen und Durchbiegungen für gerade Balken entwickelt, deren Material unter der Belastung kriecht. Für den elastischen Bereich werden die üblichen Bernoullischen Annahmen eingeführt, für den Kriechbereich wird die plastische Dehnung proportional  $(e^{\alpha\sigma} - 1)t^\beta$  gesetzt, wobei  $\sigma$  die Spannung und  $t$  die Zeit bedeutet. Die Spannungen und Durchbiegungen werden für beliebige Zeitintervalle berechnet, wobei auch die Zeit vor dem Auftreten des Kriechzustandes berücksichtigt wird, was bei früheren Ansätzen außer acht gelassen wurde.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Kačanov, L. M.: Zur Theorie des instationären Kriechvorganges. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 381—390 (1949) [Russisch].

In Verallgemeinerung des Maxwell'schen Fließgesetzes wird zwischen Spannungstensor  $P$  und Fließgeschwindigkeitstensor  $F$  angesetzt:

$$(1) \quad F = B(t) \cdot f(T^2) \cdot \tilde{P} + \frac{1}{2G} \cdot \frac{d}{dt} \left( P - \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \{P\} \cdot I \right).$$

Hier bedeutet  $\sim$  die Deviatorbildung,  $\{\}$  die Spurbildung,  $I$  die Einheitsmatrix,  $T^2 = \frac{1}{2} \{\tilde{P}^2\}$ ,  $B(t)$  ist eine monoton fallende Funktion mit  $B(\infty) > 0$ .  $f(T^2)$  hat im besonderen die Gestalt  $f(T^2) = T^{m-1}$ , mit  $m \sim 4$  bis 5. Die plastische Leistung ist dann  $L = 2 B(t) \cdot f(T^2) \cdot T^2 + \frac{d}{dt} \Pi$ , wo  $\Pi$  das elastische Potential ist. —

Setzt man  $A = \int f(\zeta) d\zeta$ , so sind die Komponenten von  $F$  die partiellen Ableitungen der „vollständigen Leistung“  $[B(t) \cdot A + \Pi]$  nach den entsprechenden Komponenten von  $P$ . — Bei Kriechvorgängen kann  $\text{div } P = 0$  gesetzt werden, so daß für ein Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $S$  aus  $\int_V \nabla \cdot \delta P \cdot dS = \int_V \int \{F \cdot \delta P\} dV$  folgt:

$$(2) \quad \delta P \int_V (B(t) \cdot A + \Pi) dV = 0 \quad \text{für Variationen } \delta P, \text{ die mit den Bedingungen}$$

längs  $S$  verträglich sind; dabei ist in  $\Pi$  nur nach  $P$  bei festgehaltenem  $\dot{P}$  zu variieren.

— Es mögen nun die Oberflächenkräfte  $P \cdot \vec{dS}$  zeitlich konstant vorgegeben sein.  $P_e$  sei die elastische Lösung [d. h.  $B(t) = 0$ ],  $P_s$  sei die Lösung des stationären

Kriechens [d. h.  $B(t) = B(\infty)$ ]; dann wird angesetzt:  $P = P_e + \tau(t) \cdot (P_s - P_e)$  mit  $\tau(0) = 0$ . Aus (2) folgt: (3)  $B(t) \cdot (\partial A^*/\partial \tau) + \tau'(t) \cdot (\partial^2 \Pi^*/\partial \tau^2) = 0$  mit  $A^* = \iiint_V A dV$  und  $\Pi^* = \iiint_V \Pi dV$ . Die Diskussion zeigt, daß  $\partial^2 \Pi^*/\partial \tau^2$  eine positive Konstante und  $\partial A^*/\partial \tau$  eine negative, monoton steigende Funktion von  $\tau$  mit  $(\partial A^*/\partial \tau)_{\tau=1} = 0$  ist. Die Lösung von (3):

$$\int_0^t B(t) dt = (\partial^2 \Pi^*/\partial \tau^2) \cdot \int_0^{\tau} (-\partial A^*/\partial \tau)^{-1} d\tau$$

bestimmt daher eine monoton wachsende Funktion  $\tau(t)$  vom Charakter  $1 - a^2 \cdot e^{-b^2 t}$  für große  $t$ . — Nach dem gleichen Prinzip werden die ähnlichen Probleme des stationären Kriechens bei Torsion und bei Biegung eines Stabes behandelt. — Bem. d. Ref.: Die gefundene Näherungslösung befriedigt zwar das Variationsprinzip, im allgemeinen aber nicht die Verträglichkeitsbedingung  $\text{rot rot } \bar{F} = 0$ , der jedes  $F$  gehorchen muß.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Arutjunjan, N. Ch.: Theorie des elastischen Spannungszustandes des Betons unter Berücksichtigung der Kriechfähigkeit. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 609—622 (1949) [Russisch].

Verf. gibt eine allgemeine Elastizitätstheorie des elastisch-kriechenden Körpers (Betons). Der Arbeit liegen folgende Voraussetzungen zugrunde: 1. Der Beton wird als homogener und isotroper Körper angenommen, 2. zwischen der Deformation des Betons infolge Kriechens und der entsprechenden Spannung besteht eine lineare Abhängigkeit, 3. es wird angenommen, daß für die Kriechdeformation das Gesetz der Superposition gilt und daß ferner beim Kriechen die Wiederherstellung bei Teil- oder Vollbelastung vernachlässigt werden kann. — Ferner wird angenommen, daß die Kriechdeformation sowohl vom Betonalter, als auch von der Wirkungs-dauer der gegebenen Belastung abhängt. — Zuerst wird der Spannungszustand eines elastisch-kriechenden Körpers unter Wirkung zeitabhängiger äußeren Kräfte behandelt und daraus wird gefolgert: wenn die Änderungen der Poisson-Koeffizienten für den elastischen bzw. für den kriechenden Teil der Deformation einander gleich sind, so ist das Spannungssystem des elastisch-kriechenden Körpers identisch mit dem Spannungszustand des entsprechenden momentan-elastisch gedachten Körpers. — In einem anderen Abschnitt der Arbeit wird der Spannungszustand, der infolge von Temperatureinflüssen, Betonschwund, Absenkung der Stützen des Bauwerkes usw. entsteht, untersucht und zum Schluß ein System von Volterra'schen Integralgleichungen zweiter Art gefunden. Dieses System läßt sich bei passender Annahme in einzelne Integralgleichungen auflösen. Nimmt man nun für die Ermittlung des Kriechmaßes eine spezielle Funktion an, dann geht das System von Integralgleichungen in lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten über, deren Lösungen sich durch Quadraturen darstellen lassen. — Im letzten Teil der Arbeit werden die Eigenschaften einer Funktion untersucht, die die Spannungsänderung charakterisiert. Für die Berechnung dieser Funktion werden Reihenentwicklungen gegeben.

Dizioglu (Istanbul).

Charron, Fernand: Écoulement des corps plastiques. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 614—615 (1950).

Verf. betrachtet die Strömung von Schmierölen in parallelen Schichten und setzt die Reibungskräfte in der Form  $X = f + \eta \partial u / \partial x$  an, die innere Spannungen wie in ideal-plastischen Körpern im Gefolge haben. Das Auftreten von  $f$  bedeute einen Einfluß nach Art der Coulombschen Reibung, so daß für die Rohrströmung ein gewisser Druckgradient existiert, unterhalb dessen der Körper in Ruhe bleibt. Oberhalb dieses Druckgradienten existiert immer ein zentraler Zylinder, der sich als Ganzes bewegt. Es wird der Durchfluß bestimmt, der dem angegebenen Zähigkeitsgesetz entspricht.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Oldroyd, J. G.: Rectilinear flow of non-Bingham plastic solids and non-Newtonian viscous liquids. I. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 595—611 (1949).

In Weiterführung früherer Veröffentlichungen wird für weitere Arten von plastischen Stoffen und nicht-Newtonschen Flüssigkeiten das Fließen in zylindrischen Röhren mit verschiedenen Querschnitten untersucht und gezeigt, daß die Geschwindigkeitsverteilungen durch Integrale einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen dargestellt werden können. Für

die Querschnitte werden orthogonale krummlinige Koordinaten ( $w, W$ ) eingeführt, in denen diese Differentialgleichung die Form hat:  $[f(\xi) \xi_w]_w + [g(\xi) \xi_W]_W = 0$ .

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Blair, G. W. Scott and J. E. Caffyn:** An application of the theory of quasi-properties to the treatment of anomalous strain-stress relations. *Philos. Mag., J. Sci. theor. exper. appl. Phys.*, VII. S. 40, 80—94 (1949).

Als Quasi-Eigenschaften werden hier solche bezeichnet, die zu anormalen Spannungs-Dehnungsbeziehungen führen. Zur Darstellung derartiger Beziehungen in der Strömungslehre der festen Körper wurde von P. G. Nutting (1921) ein Relaxationsgesetz in der Form aufgestellt  $\psi = \sigma^\beta \varepsilon^{-1} t^k$ , worin  $\sigma$  die Spannung,  $\varepsilon$  die Dehnung,  $t$  die Zeit,  $\beta$ ,  $k$  gewisse Konstante und  $\psi$  eine „Quasi-Eigenschaft“ im Sinn der von den Verf. angewendeten Bezeichnung bedeutet. Die Größen  $\psi$ ,  $\beta$  und  $k$  zusammen und einige aus dieser Gleichung abgeleitete Beziehungen werden dazu verwendet, gewisse Fließvorgänge bei festen Körpern darzustellen.

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Dingle, Herbert:** On the dimensions of physical magnitudes. (Seventh paper: A paradox in dimensional theory.) *Philos. Mag., J. Sci. theor. exper. appl. Phys.*, VII, S. 40, 94—99 (1949).

Betrachtung über die Frage der Dimension der in der vorhergehenden Mitteilung von Blair u. a. behandelten Relaxationsgesetzes von P. G. Nutting eingeführte Größe  $\psi$ . Verf. findet, daß aus dimensional Gründen kein Einwand gegen diese Formel erhoben werden kann. (Ref. ist nicht dieser Ansicht.)

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Rivlin, R. S.:** Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philos. Trans. R. Soc. London*, A 242, 173—195 (1949).

In diesem Teil seiner Artikelreihe [s. a. dies. Zbl. 29, 326, 327; 31, 426] über denselben Gegenstand berechnet der Verf. die Kräfte, die zur Erzeugung von gewissen einfachen Verformungstypen eines Rohres aus inkompressiblem, hochelastischen Stoff, das unverformt isotrop ist, erforderlich sind. Der erste Typus von Verformungen besteht in der Überlagerung 1. einer gleichförmigen einfachen Dehnung, 2. einer gleichförmigen Aufblähung, bei der die Länge konstant bleibt, 3. einer einfachen Verdrehung. Der zweite Typus besteht aus 1. und 2., überlagert mit einfachen Scherungen um die Rohrachse und parallel zu ihr. (Bei diesem bewegt sich jeder Punkt des Rohres um die Achse um einen Winkel  $\varphi$ , bzw. durch eine Strecke  $w$ , die nur von  $r$  abhängen.) Schließlich wird die einfache Biegung und gleichförmige Dehnung normal zur Biegungsebene einer dicken Schicht untersucht und frühere Resultate verallgemeinert.

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**O'Neil, H. T.:** Reflection and refraction of plane shear waves in viscoelastic media. *Phys. Rev., Lancaster Pa.*, II. S. 75, 928—935 (1949).

Die Scherungselastizität und Zähigkeit von Flüssigkeiten bei Überschall-Frequenzen in einem elastischen festen Körper wird mittels ebener Scherungswellen durch Messung des Reflexionsverlustes und der Phasenverschiebung gemessen, die durch Reflexion an einer ebenen Grenzfläche zwischen dem festen Körper und einer Flüssigkeit verursacht werden. Während zunächst nur normale Incidenz verwendet wurde, wurde nunmehr festgestellt, daß schräge Incidenz eine erhöhte Wirkung ergibt. Die Note gibt eine Ableitung der Beziehungen zwischen den Konstanten der beiden Medien, dem komplexen Reflexionskoeffizienten und dem Einfallswinkel und enthält die Beschreibung einiger allgemeiner Eigenschaften der reflektierten und gebeugten Scherungswellen in isotropen visko-elastischen Medien. Die Reflexionen verschiedener Ordnungen werden mittels einer besonderen Pulsationstechnik an dem verwendeten schwingenden Kristall voneinander getrennt. Die Messungen zeigen, daß die Amplitude und Phase der aus dem Detektor entstehenden



Wellen praktisch von der Dicke der Flüssigkeit unabhängig ist, bis die Dicke auf einen Wert von der Größenordnung von 0,001 cm vermindert wird. *Th. Pöschl.*

### Hydrodynamik:

**Truesdell, Clifford:** Généralisation de la formule de Cauchy et des théorèmes de Helmholtz au mouvement d'un milieu continu quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 757—759 (1948).

Der durch Konvektion geänderte Rotationsvektor hängt in einem kontinuierlichen Medium nur vom Anfangszustand der Bewegung und nicht von ihrer Geschichte ab; umgekehrt wird der durch Diffusion geänderte Rotationsvektor wesentlich vom Bewegungsablauf bestimmt. *Pretsch (Bonn).*

**Truesdell, Clifford:** Deux formes de la transformation de Green. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1199—1200 (1949).

Durch zweimalige Anwendung des Greenschen Satzes auf das Produkt zweier Vektorfelder wird bewiesen, daß in einer Bewegung eines kontinuierlichen Mediums im abgeschlossenen Volumen  $V$  das  $n$ -te Moment des Rotationsvektors verschwindet, falls der Geschwindigkeitsvektor und seine ersten Ableitungen stetig sind und die Flüssigkeit an der Wand haftet. *Pretsch (Bonn).*

**Vignier, Gabriel:** Notions métriques liées à l'équation de Riccati et équation de Schrödinger intervenant dans l'étude du mouvement d'un fluide visqueux. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1343—1344 (1950).

Ein Problem von Boussinesq führt auf eine Riccatische Gleichung, die durch eine elementare Substitution auf eine spezielle Gleichung der Schrödingerschen Wellenmechanik übergeführt werden kann. Eine weitere Transformation auf die Normalform der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf die die Darboux'sche Kette angewendet werden kann. Es bestehen weitere Zusammenhänge. *Hamel.*

**Gerber, R.:** Sur la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble, **1**, 157—162 (1950).

Bekanntlich lassen sich die Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit in der Eulerschen Form nicht auf ein Variationsproblem zurückführen. Verf. beweist dasselbe für die Lagrangesche Form. Natürlich gibt es Ausnahmen. *Hamel.*

**Kampé de Fériet, J.:** Sur la décroissance de l'énergie cinétique d'un fluide visqueux incompressible occupant un domaine borné ayant pour frontière des parois solides fixes. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. S. **63**, Nr. 1, 36—45 (1949).

Die Dissipation der Energie einer zähen Flüssigkeit, die zwischen festen Wänden strömt, wird elementar durch die Tatsache bewiesen, daß die Ableitung der kinetischen Energie nach der Zeit immer negativ (oder null) ist. J. Leray hat [J. math. pur. appl. **13**, 331—417 (1934)] dieses Ergebnis verschärft, indem er zeigte, daß diese Abnahme der kinetischen Energie mindestens nach einer Exponentialfunktion erfolgt. Der Verf. hat die dort eingeführten Voraussetzungen in einer vorhergehenden Note [C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 1096—1098 (1946)] wesentlich erweitert und für das logarithmische Dekrement einen Ausdruck angegeben, der so einfach als möglich mit der Form des Bereiches verbunden ist. Nunmehr zeigt der Verf., daß der mathematische Ursprung dieser Ergebnisse in einer einfachen Ungleichung zwischen dem Integral über das Quadrat einer Funktion und dem Integral über das Quadrat ihrer Ableitung liegt, die auf einer Ungleichung von G. H. Hardy, J. E. Littlewood u. G. Polya beruht. *Th. Pöschl.*

**Carrier, G. F. and J. A. Lewis:** On heat transfer problems in viscous flow. Quart. appl. Math. **7**, 450—457 (1950).

Um die Temperaturverteilung in der zähen Strömung durch einen engen Kanal zu bestimmen, werden die Bewegungsgleichungen vereinfacht. Je nach der

Größenordnung des dimensionslosen Parameters  $\varepsilon = \frac{k}{\rho c U_0 L}$ , wo  $k$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\rho$  die Dichte,  $c$  die Wärmekapazität,  $U_0$  eine charakteristische Geschwindigkeit und  $L$  eine charakteristische Länge bedeuten, lassen sich die Lösungen in drei Klassen einteilen. Für  $\varepsilon \gg 1$  ist die Temperaturverteilung über dem Kanal bis auf ein schmales Einlaufgebiet vom Wandabstand unabhängig. Für  $\varepsilon \sim 1$  (Lagerschmierung) bereitet die Lösung einige Schwierigkeiten. Für  $\varepsilon \ll 1$  spielt die Wärmeleitfähigkeit nur in Wandnähe eine Rolle, und die Temperaturverteilung setzt sich aus einer Grenzschichtlösung und einem konvektiven Beitrag zusammen; für die Strömung zwischen ebenen Wänden wird in diesem Fall mit einer Laplace-Transformation die erste Näherung der Temperaturverteilung explizit angegeben.

Pretsch (Bonn).

Synge, J. L.: Note on the kinematics of plane viscous motion. Quart. appl. Math. 8, 107—108 (1950).

Verallgemeinerung und neuer Beweis eines Satzes des Ref. aus dem Jahre 1911 [Göttinger Nachr., Math.-Phys. Kl. 1911, 261—270]: Hinreichend und notwendig für die Erfüllung der Bedingungen

$$u_x + v_y = \Theta, \quad v_x - u_y = 2\omega$$

in einem Gebiet der  $x, y$ -Ebene, auf dessen Rande  $u$  und  $v$  verschwinden sollen, ist das Verschwinden des Integrals  $\int (2\omega U - \Theta V) dx dy$  für jedes Paar konjugiert harmonischer Funktionen  $U$  und  $V$ .

Hamel (Landshut).

Ludwig, H. und W. Tillmann: Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. Ingenieur-Arch. 17, 288—299 (1949).

Wegen der unbefriedigenden Kenntnisse über das Verhalten der Wandschubspannung in Reibungsschichten mit Druckgradienten bei Kanalströmungen wurde diese Frage erneut behandelt. Es wurde gezeigt, daß bei allgemeinen turbulenten Reibungsschichten in Wandnähe, d. h. in der laminaren Unterschicht, im Übergangsbereich und im wandnahen Teil des voll turbulenten Bereiches, das gleiche universelle Geschwindigkeitsgesetz wie bei der Plattenströmung gilt. Daraus wurde eine Formel für den örtlichen Widerstandsbeiwert  $c_f$  abgeleitet, der nur von der mit der Impulsverlustdicke gebildeten Reynoldsschen Zahl und einem Profilparameter abhängt. Diese Formel wurde durch mehrere Versuchsreihen bestätigt. Umgekehrt kann man aus der Kenntnis des Geschwindigkeitsprofils den zugehörigen Reibungsbeiwert bestimmen.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Bosworth, R. C. L.: Distribution of reaction times for turbulent flow in cylindrical reactors. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., VII. S. 40, 314—324 (1949).

In einer früheren Arbeit [Philos. Mag. J. theor. exper. appl. Phys., VII. S. 39, 147 (1948)] hat der Verfasser gezeigt, daß die Zeit, die für das Fortschreiten einer chemischen Reaktion in einer Lösung, die sich in einem zylindrischen Gefäß in laminarer Strömung befindet, nicht durch eine einzige Reaktionszeit, sondern nur durch eine gewisse statistische Verteilungskurve dargestellt werden kann. Die Form dieser Kurve wird jetzt für turbulente Strömung gegeben und hierfür das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz in der Form

$$v = v_0 [(R-r)/R]^{1/n},$$

wobei für relativ glatte Rohre  $n = 7$ ,  $2000 \leq Re \leq 100000$  angenommen wird. Es wird die Größe des Koeffizienten der turbulenten Diffusion und die Wirkung der interlaminaren und der longitudinalen Diffusion untersucht und gezeigt, daß die Form der Verteilungskurve nur vom Verhältnis Länge : Durchmesser des Gefäßes abhängt, aber von den physikalischen Eigenschaften des Reagenzmittels (insbesondere dessen Reynoldsscher Zahl) so gut wie unabhängig ist.

Th. Pöschl.

Verschaffelt, J. E.: Über die Dynamik von Gasgemischen. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 27, 52—64 (1950) [Holländisch].

Verf. untersucht gaskinetisch die Strömungen in einem abgeschlossenen Gemenge von  $n$  idealen Gasen (die durch den Zeiger  $v$  unterschieden werden). Ohne auf eine einfache zusammenfassende Bewegungsgleichung zu kommen, weist er nach, daß nicht alle für ein einheitliches Gas gültigen Beziehungen bestehen bleiben. Ist  $\mathbf{w}_v$  der Geschwindigkeitsvektor irgendeines Moleküls der  $v$ -ten Sorte, so ist  $\mathbf{u}_v = \bar{\mathbf{w}}_v$  die Strömungsgeschwindigkeit dieser Gasart; der Querstrich bedeutet, bei festgehaltener Zeit, Mittelung über ein Raumelement mit Abmessungen in der Größenordnung der freien Weglängen. Als Teildruck wird  $p_v = \frac{1}{3} \rho_v (\mathbf{w}_v - \mathbf{u}_v)^2 = \frac{1}{3} \rho_v (\bar{w}_v^2 - u_v^2)$  genommen, also der Gesamtbetrag der Impulsströmungsdichte für die allein vorhandenen gedachten Moleküle der Sorte  $v$ ;  $\rho_v = N_v m_v$  ist die räumliche Massendichte,  $N_v$  die Anzahl je Raumeinheit und  $m_v$  die Masse der  $v$ -Moleküle. Für jede Gassorte einzeln wird dann die Strömungsgleichung  $\rho_v d\mathbf{u}_v/dt + \text{grad } p_v + \mathfrak{R}_v = 0$ , wobei  $\mathfrak{R}_v$  die auf die Gasart  $v$  ausgeübte Kraft infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen der anderen Arten ist. Da die  $\mathfrak{R}_v$  innere Kräfte des Gasgemenges sind, so hat man  $\sum \mathfrak{R}_v = 0$ . — Bildet man mit der Gesamtdichte  $\rho = \sum \rho_v$  und der Gesamtanzahl  $N = \sum N_v$  die Verhältnisse  $x_v = \rho_v/\rho$  und  $\xi_v = N_v/N$ , so gibt von den beiden im allgemeinen verschiedenen Mittelwerten für die Gesamtströmungsgeschwindigkeit des Gasgemenges  $\mathbf{u}_1 = \sum x_v \mathbf{u}_v$  und  $\bar{\mathbf{u}} = \sum \xi_v \mathbf{u}_v$  der erste  $\mathbf{u}_1$  die Schwerpunktsbewegung an. Die Vermutung aber, daß nun etwa  $\rho d\mathbf{u}_1/dt + \text{grad } \sum p_v = 0$  sei, ist falsch; vielmehr muß man auf der linken Seite noch  $\text{Div } \sum (\xi_v \mathbf{v}_v \cdot \mathbf{v}_v)$  hinzufügen, worin  $\mathbf{v}_v = \mathbf{u}_v - \mathbf{u}_1$  ist, so daß dieser Tensor und seine Vektordivergenz im allgemeinen nicht verschwinden. Keiner der beiden Mittelwerte  $\mathbf{u}_1$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  entspricht übrigens dem Begriff einer Gesamtströmungsgeschwindigkeit des Gases in dem Sinne, daß der Transport von Bewegungsgröße relativ verschwindet; diese Bestimmung führt vielmehr auf den Mittelwert  $\mathbf{u}_0 = \sum y_v \mathbf{u}_v$  mit  $y_v = N_v/\sqrt{m_v} / \sum N_v/\sqrt{m_v}$ . Für die Temperatur als das  $(2/3k)$ -fache der mittleren relativen Translationsenergie eines Moleküls findet man  $3RT = M \sum x_v (\bar{w}_v - \bar{u}_0)^2$  mit  $M = \sum \xi_v M_v$  als durchschnittlichem Molekulargewicht. Wird auch der Gesamtdruck  $p$  als Summe der ein Flächenelement durchsetzenden Impulsbeiträge aufgefaßt, so gilt nur noch an den Wänden  $p = \sum p_v$ ; im Innern des Gases hingegen wird der Druck anisotrop, so daß er nicht mehr zwei Dritteln der relativen kinetischen Energiedichte gleichkommt. — Auf Arbeiten von S. Chapman and T. C. Cowling, J. G         sowie Th. de Donder wird n         eingegangen.

B         (Brunoy).

**Schultz-Grunow, F.: Der Carnotsche Stoßverlust in nichtstationärer Gasströmung.** Z. angew. Math. Mech. 29, 257—267 (1949).

Mit den bekannten Charakteristikenverfahren für instationäre Gasströmungen werden in dieser Arbeit F  lle behandelt, bei welchen an bestimmten Stellen Carnotsche Stoßverluste auftreten. Letztere werden quasistationär angenähert, was stets möglich ist, wenn die Verlustvorg  nge nur einen kleinen Teil der Längen beanspruchen, in welchen sich der Gesamtvorgang abspielt. Theorie und Versuch zeigen befriedigende Übereinstimmung, wenn nicht nur Schieberverluste, sondern auch Verluste beim Einströmen am offenen Rohrende berücksichtigt werden. Erhebliche Vereinfachungen ergeben sich bei periodischen Vorgängen. K. Oswatitsch (Stockholm).

**Hicks, Bruce L.: An extension of the theory of diabatic flow.** Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 286 (1950).

Auf Grund einer Störungsrechnung der nichtlinearen, diabatischen Bewegungsgleichungen wird gezeigt, daß durch eine Wärmequelle Kräfte sowohl parallel als senkrecht zur Strömungsrichtung hervorgerufen werden können, während in der klassischen adiabatischen Strömung nur Kräfte senkrecht zur Bewegungsrichtung auftreten.

Pretsch (Bonn).

**Thomas, T. Y.: Distribution of pressure on curved profiles in supersonic gas flow with variable entropy.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 109—115 (1950).

Für ein gekrümmtes Profil in ebener Überschallströmung mit an seiner Spitze anliegender Kopfwelle  $\Sigma$  wird ein Näherungsverfahren zur Ermittlung der Druckverteilung längs der Profilkontur angegeben. Es geht davon aus, daß infolge der Sto  frontkr  mmung die Entropie  $S$  von Stromlinie zu Stromlinie hinter  $\Sigma$  variiert, und demgemäß der Druck  $p$  in dieser Strömung Funktion nicht nur des Neigungswinkels  $\vartheta$  der Strömung, sondern auch von  $S$  ist. Die freie additive Konstante in der Entropieverteilung auf die Stromlinien sei dabei so normiert, daß  $S = 0$  auf dem Profil. Zudem wird angenommen, daß vor  $\Sigma$  homogene Parallelströmung herrsche. — Aus der in der stromabseitigen Umgebung eines jeden Punktes von  $\Sigma$  (mit  $\vartheta = \omega$ ,  $S = S_*$ ) als möglich vorausgesetzten Potenzreihenentwicklung von  $p(\omega, S)$  nach



Potenzen von  $S - S_*$  folgt dann auf dem Profil im Punkte mit  $\vartheta = \omega$

$$(1) \quad p(\omega, 0) = p(\omega, S_*) - \frac{\partial p(\omega, S_*)}{\partial S} S_* + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\omega, S_*)}{\partial S^2} S_*^2 - \dots$$

und hieraus als 1. Näherung  $p(\omega, 0) = p(\omega, S_*)$ , d. h. man ordnet jedem Profilverpunkt der Neigung  $\omega$  denjenigen aus den Stoßformeln leicht explizit ermittelbaren Druck zu, der im Schnittpunkt von  $\Sigma$  mit der Isokline  $\vartheta = \omega$  des Feldes herrscht. Die 2. Näherung lautet gemäß (1)

$$p(\omega, 0) = p(\omega, S_*) - \frac{\partial p(\omega, S_*)}{\partial S} S_*$$

und macht längs  $\Sigma$  die Ermittlung der partiellen Ableitung von  $p$  nach  $S$  erforderlich. Diese wird mittels vom Verf. früher gegebener [J. Math. Phys., Massachusetts 26, 62—68 (1947) und dies. Zbl. 35, 421] bzw. demnächst erscheinender [Commun. Appl. Math., New York Univ.] Formelmechaniker geleistet. — Zum Abschluß wird die durch die 2. Näherung gegenüber der 1. Näherung gebrachte Korrektur von  $p'p_1$  ( $p_1$  = Druck vor  $\Sigma$ ) für ein Kreisbogenprofil [vom Verf. in Proc. nat. Acad. Sci. USA, 35, 617—627 (1949) bereits behandelt] über die Profiltiefe bei den drei Anstellwinkeln  $\alpha = -10^\circ, 0^\circ, 26^\circ$  angegeben. Für  $\alpha = 26^\circ$  ist diese Korrektur in den letzten 30% der Tiefe von der Größenordnung der 1. Näherung selbst, für  $\alpha = 0^\circ$  dagegen durchweg relativ klein. Behrbohm.

Ward, G. N.: Supersonic flow past thin wings. I. General theory. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 136—152 (1949).

Das linearisierte Potentialproblem der Überschallströmung wird für ebene Flügel mit beliebigem Grundriß und Profil gelöst, indem das Geschwindigkeitsfeld in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgespalten wird. Der symmetrische Teil entspricht einem Flügel kleiner endlicher Dicke bei Nullanstellung und kann unmittelbar aus der allgemeinen Hadamardschen Lösung der hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung nach Puckett [Journ. Aero. Sci. 1946] berechnet werden. Der antisymmetrische Teil entspricht einem Flügel verschwindender Dicke und wird mit Hilfe einer Integralgleichungsmethode durch Transformation auf charakteristische Koordinaten bestimmt, die Evvard [NACA Techn. Note 1382, 1947] bei der Berechnung der Strömung um Flügelspitzen mit gekrümmten Unterschallvorderkanten angewendet hat. Wenn das Seitenverhältnis so groß ist, daß die Strömungen an den Flügelspitzen voneinander unabhängig sind, ist eine einfache analytische Darstellung möglich. Prctsch (Bonn).

Turner, M. J.: Aerodynamic theory of oscillating sweptback wings. J. Math. Phys., Massachusetts 8, 280—293 (1950).

Verf. verallgemeinert die von Reissner [N.A.C.A. Tech. Note 946 (1944) und 1194 (1947)] entwickelte Theorie des nicht (oder nur schwach) gepfeilten, schwingenden Tragflügels endlicher Spannweite auf Flügel mit Pfeilstellung. Als Vorstufe wird der unsymmetrisch angeströmte, ungepfeilte Flügel konstanter Tiefe mit Seitenkanten parallel zur Grundströmung ausführlich behandelt. Im Unterschied zum symmetrischen Fall können jetzt einige Terme im Kern der Integralgleichung nicht mehr vernachlässigt, aber wenigstens durch numerisch brauchbarere Ausdrücke approximiert werden, die sich mittels bereits tabellierter Funktionen berechnen lassen. So entsteht eine eindimensionale Integralgleichung ähnlicher Bauart wie bei Reissner, die auch analog numerisch gelöst werden kann.

Weissingner (Hamburg).

Falkovich (Falkovič), S. V. and M. D. Haskind (Chaskind): Vibration of a wing of finite span in a supersonic flow. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 371—376 u. engl. Zusammenfassg. 376 (1947) [Russisch].

Ein unendlich dünner, schwach gekrümmter Flügel, dessen Grundriß ein gleichschenkliges Dreieck bildet, werde mit Überschallgeschwindigkeit (symmetrisch)

angeströmt und gleichzeitig kleinen harmonischen Schwingungen bzw. Deformationen unterworfen. Der Flügel liege ganz im Machschen Kegel der Spitze. Nach Einführung geeigneter Koordinaten läßt sich die linearisierte Gleichung für das Strömungspotential separieren und die Lösung in eine Reihe nach Besselfunktionen entwickeln, die im stationären Fall in eine Potenzreihe übergeht. Die Koeffizienten sind von der Schwingungsfrequenz unabhängig. Ihre Bestimmung wird auf die Lösung gewöhnlicher Eulerscher Differentialgleichungen zurückgeführt, wobei die Integrationskonstanten sich als Lösungen von gewissen Systemen linearer Gleichungen ergeben, die die Endlichkeit des Potentials am Flügelrand ausdrücken.

Weissinger (Hamburg).

**Gurevich (Gurevič), M. I.:** On the thin triangular wing at supersonic speed. Priklad Mat. Mech., Moskva 11, 395—396 u. engl. Zusammenfassg. 396 (1947) [Russisch].

Ergänzung der vorstehend besprochenen Arbeit von Falkovich und Haskind auf den Fall, daß der Flügel nicht ganz im Machschen Kegel der Spitze liegt.

Weissinger (Hamburg).

**Richter, Hans:** Distacco dell'onda anteriore sul profilo convesso. Aerotecnica 29, 165—170 (1949).

Bezeichnet man mit  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $M_1$  ( $p$  = Druck,  $V$  = spezifisches Volumen,  $M$  = Machsche Zahl) den Zustand vor einem schiefen Verdichtungsstoß, so ist durch die Vorgabe von  $p_1$ ,  $V_1$ ;  $M_1$  und des Druckes  $p_2$  hinter dem Stoß der dort herrschende Zustand einschließlich des Umlenkungswinkels  $\vartheta$  festgelegt. Trägt man diesen als Funktion von  $p_2$  auf, so erhält man die Herzkurve. Für ideale Gase gilt längs dieser Kurve: 1. es existiert genau ein Maximum für  $\vartheta$  ( $\vartheta_m$ ,  $p_m$ ), 2. mit wachsendem  $p_2$  fällt die Abströmgeschwindigkeit  $W_2$  und desgleichen  $M_2$  von  $M_1 > 1$  bis zu einem Wert  $< 1$ , 3. bezeichnet man mit  $p_s$  den Wert von  $p_2$ , für den  $M_2 = 1$  ist, so ist  $p_s \leq p_m$ , also für  $p_2 = p_m$  ist  $M_2 \leq 1$ . Es wird gezeigt, daß diese Eigenschaften der Herzkurve auch für allgemeine Zustandsgleichungen erhalten bleiben, wenn a) auf der Hugoniot-Kurve mit wachsendem  $p_2$  auch die Entropie zunimmt, b) die Herzkurve keine zu starke Konkavität zur  $p_2$ -Achse besitzt. — Bezeichnet man mit  $s$  die Bogenlänge längs der Stromlinie, so gibt es auf jeder Herzkurve wenigstens einen „Crocco-Punkt“  $p_c$ , für den  $\partial p_2 / \partial s$ ,  $\partial w_2 / \partial s$  unendlich werden. Es ist  $p_s \leq p_c \leq p_m$ . Diese allgemeinen Aussagen werden benutzt, um qualitative Aussagen über Profilströmungen zu gewinnen, z. B. daß in der Umgebung eines Crocco-Punktes eine Ablösung zu erwarten ist.

Söhngen (Darmstadt).

**Bernard, Jean-J.:** Sur l'écoulement continu et unidimensionnel à travers une onde de choc droite ou oblique. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1339—1340 (1950).

Erweiterung der Untersuchungen von M. Maurice Roy und M. Morduchow-P. A. Libby [J. Aeron. Sci. 11, 674—684 (1949)] über eindimensionale, zähe Strömung durch eine gerade Stoßwelle für eine spezielle Prandtlsche Zahl. — Verf. deutet eine konvergente sukzessive Approximationsmethode bei gebräuchlichen Prandtlschen Zahlen zur Berechnung der Temperatur als Funktion der Geschwindigkeit an. Bei gewisser Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit kann man für beliebige Prandtlsche Zahlen angenäherte Lösungen mit Hilfe von Reihenentwicklung oder Linearisierung erhalten.

Dizioğlu (Istanbul).

**Weyl, Hermann:** Shock waves in arbitrary fluids. Commun. pure appl. Math., New York 2, 103—122 (1949).

Um die allgemeinen hydro- und thermodynamischen Grundlagen des Stoßes zu klären, werden zunächst die vier Bedingungen für die Zustandsgleichung einer Flüssigkeit aufgestellt, unter denen Stöße hervorgerufen werden können. Diese Bedingungen sind teils differentieller, teils globaler Natur. Die physikalische Struktur der eindimensionalen „Stoß-Schicht“, deren Dicke infinitesimal ist, wenn Wärmeleitfähigkeit und Zähigkeit von derselben Größenordnung verschwinden, ist sehr verschieden von der komplizierteren dreidimensionalen Gleitschicht, die

mit der Prandtl'schen Grenzschicht identisch ist. Die thermodynamischen Anfangs- und Endzustände  $Z_0$  und  $Z_1$  und nur sie sind singuläre Punkte für die Differentialgleichungen der Stoß-Schicht:  $Z_0$  ist ein Knoten,  $Z_1$  ein Sattelpunkt. Topologische Beweisführung läßt erwarten, daß die Lösung eindeutig ist. *Pretsch (Bonn).*

**Robbertse, W. P. and J. M. Burgers:** Solutions of the equations for the non-uniform propagation of a very strong shock wave. I. *Proc. Akad. Wet., Amsterdam* **52**, 958—965 (1949).

Im Anschluß an frühere Arbeiten [Robbertse, Thesis Delft 1948, Burgers, dies. Zbl. **29**, 384] wird eine allgemeinere Lösung einer starken Stoßwelle mitgeteilt, die sich mit wachsender Geschwindigkeit durch ein Gas mit abnehmender Dichte ungleichförmig ausbreitet, indem die komplizierte Randbedingung am Ort der Stoßwelle für hohe Machzahlen durch eine einfachere Bedingung ersetzt wird.

*Pretsch (Bonn).*

**Thomas, T. Y.:** Calculation of the curvatures of attached shock waves. *J. Math. Phys., Massachusetts* **27**, 279—297 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 62—68 (1947)] wird für das Verhältnis von Stoßlinienkrümmung zur Stromlinienkrümmung unmittelbar hinter der Stoßlinie in einer stationären, nichtadiabatischen, ebenen, idealen Gasströmung nahe der Vorderkante des umströmten Körpers eine Formel abgeleitet und für den Machzahlbereich von 1,05 bis 4,45 in Abhängigkeit vom Stoßlinienöffnungswinkel berechnet.

*Pretsch (Bonn).*

**Thomas, T. Y.:** The distribution of singular shock directions. *J. Math. Phys., Massachusetts* **28**, 153—172 (1949).

In einer früheren Arbeit [dies. Zbl. **34**, 121] war gezeigt worden, daß in einer ebenen, stationären Überschallströmung die  $n$ -te Ableitung  $K_n$  der Krümmung des umströmten Körpers nach der Bogenlänge, entlang der Körperkontur gemessen, darstellbar ist in der Form:  $K_n = G_n(M, \alpha) \kappa_n + H_n$ , wo  $\kappa_n$  die  $n$ -te Ableitung der Stoßlinienkrümmung nach der Bogenlänge, entlang der Stoßlinie gemessen, bezeichnet,  $M$  die Machzahl der ankommenden Strömung,  $\alpha$  den Stoßlinienöffnungswinkel.  $G_n(M, \alpha)$  und die Koeffizienten der Polynome  $H_n$  (in  $\kappa$  und  $\kappa_m$ ,  $m < n$ ) sind dabei rationale Funktionen von  $M^2$  mit von  $\alpha$  abhängigen Koeffizienten. Wenn für  $M > 1$  ein Wert  $\alpha$  existiert, für den eine der Funktionen  $G_n$  verschwindet, wird er zu  $M$  singulär genannt, da es dann keine Stoßwellenlösung gibt. In der vorliegenden Arbeit wird die Verteilung der Nullstellen aller Funktionen  $G_n$ , d. i. der singulären  $\alpha$ -Werte für beliebige  $M$  bestimmt.

*Pretsch (Bonn).*

**Sterne, Theodore E.:** A note on collapsing cylindrical shells. *J. appl. Phys., Lancaster Pa.* **21**, 73—74 (1950).

Bei radialer Kontraktion eines langen, inkompressiblen, flüssigen Hohlzylinders wird die Geschwindigkeit der Innenfläche unbegrenzt wachsen und diejenige der Außenfläche auf Null abnehmen. Das Druckmaximum im Innern der Flüssigkeit verlagert sich dabei nach innen und kann bei Anwendung eines äußeren Druckes auf die Außenhaut den Außendruck um eine bis zwei Größenordnungen übertreffen.

*Pretsch (Bonn).*

**Heins, Albert E.:** Water waves over a channel of finite depth with a dock. *Amer. J. Math.* **70**, 730—748 (19548).

Um die wellenähnlichen Lösungen beim Dock über einem Kanal endlicher Tiefe zu untersuchen, muß an der Dockkante eine logarithmische Singularität zugelassen werden. Wenn das Potential durch eine Greensche Funktion ausgedrückt wird, erhält man eine Integralgleichung mit Faltungskern vom Wiener-Hopf-Typ, die mit Fourier-Transformierten gelöst wird. Die fortschreitende Welle erhält man durch Überlagerung der quellenfreien Lösung und der Lösung mit Singularität, die durch Differentiation aus der beschränkten Lösung hervorgeht. Zahlenangaben



und Rechenverfahren dieser „exponentiellen Technik“ sollen später an anderer Stelle veröffentlicht werden. *Pretsch (Bonn).*

**Ursell, F.: Surface waves on deep water in the presence of a submerged circular cylinder. I.** Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 141—152 (1950).

Nachdem Dean die Reflexion von Wasserwellen an einem untergetauchten liegenden starren Zylinder untersucht hatte (W. R. Dean, dies. Zbl. **31**, 135), behandelt Verf. hier den Fall, daß der Zylinder nachgiebig ist, die Normalgeschwindigkeiten an der Zylinderfläche also nicht ganz verschwinden. Um dort den Randbedingungen zu genügen, nimmt er eine pulsierende Quelle in der Zylinderachse an, die durch Überlagerung aus einer Folge von Quellen wachsender Ordnung zusammengesetzt wird. Die Gleichungssysteme für die Stärken der einzelnen Quellen lassen sich mit unendlichen Kochschen Determinanten lösen, wobei für symmetrische und antimetrische Randbedingungen die gleichen Beizahlen der Unbekannten auftreten. Als Parameter erscheint dabei die Wellenzahl auf den Zylinderumfang. Insbesondere bei starrem Zylinder liefern die symmetrischen und die antimetrischen Quellen im Unendlichen entgegengesetzt gleiche Potentiale, womit das von Dean gefundene Fehlen einer Reflexion bestätigt wird. *Bödewadt (Brunoy).*

**Ursell, F.: Surface waves on deep water in the presence of a submerged circular cylinder. II.** Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 153—158 (1950).

In diesem zweiten Teil der vorsteh. referierten Arbeit wird nachgewiesen, daß die als Nenner benutzte Kochsche Determinante nicht Null werden kann, weil daraus Bedingungen für das Geschwindigkeitspotential folgen würden, die zu seinem Verschwinden führen müssen. Es handelt sich also um eine Art von Einzigkeitsbeweis für die Lösung. *Bödewadt (Brunoy).*

**Peters, A. S.: A new treatment of the ship wave problem.** Commun. pure appl. Math., New York **2**, 123—148 (1949).

Das linearisierte Problem der von einer geradlinig auf der Wasseroberfläche bewegten Störungsquelle hervorgerufenen Oberflächenwellen ist schon von Kelvin und später auf dem Wege über das Geschwindigkeitspotential von Hogner gelöst worden. Hier wird eine neue Darstellung der Lösung gegeben, indem die von H. Lewy [Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 737—775 (1946)] auf ebene Wellenprobleme angewandte Methode auf die dreidimensionale Fragestellung ausgedehnt wird. Dabei ergibt sich, daß die asymptotischen Ausdrücke für die Oberflächenwellen außerhalb des von Kelvin angegebenen Störungswinkelbereiches nicht verschwinden; am Ort der Störungsquellenbahn erhält man im Gegensatz zu Kelvin einen endlichen Betrag der Auslenkung. *Pretsch (Bonn).*

**Trilling, Leon: The impact of a body on a water surface at an arbitrary angle.** J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 161—170 (1950).

Es wird eine Lösungsmethode zur Bestimmung der Druckverteilung während des Stoßvorganges eines unter beliebigem Winkel auf eine horizontale Wasseroberfläche auftreffenden Körpers dargestellt. Wenn die natürliche Randbedingung an der freien Oberfläche, die nicht linear ist, unter Vernachlässigung des endlichen zeitlichen Ablaufs und der Deformation der freien Oberfläche durch die Druckbedingungen der ursprünglichen freien Oberfläche ersetzt wird, hat man ein lineares harmonisches Problem zu lösen, das in zwei Teile aufgespalten wird. Die zur freien Oberfläche normale Geschwindigkeitskomponente induziert dasselbe Potential  $\varphi_1$  wie die eines voll eingetauchten in Translation befindlichen Körpers. Die zur freien Oberfläche parallele Geschwindigkeitskomponente induziert ein Potential  $\varphi_2$ , das man erhielte, wenn die Flüssigkeit über der Symmetrieebene mit einer dem Betrag nach gleichen, aber in der Richtung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit unten entgegengesetzten Geschwindigkeit flösse, was eine Wirbelbelegung entlang der Symmetrieebene bewirkt. Da das vereinfachte Problem nicht explizit von der Zeit abhängt, wird der zeitliche Ablauf durch die Veränderung in Abmessung und Gestalt

des eingetauchten Körperabschnittes ausgedrückt. Das Impulsintegral hängt dann in jedem Augenblick nur von geometrischen Parametern ab, die ihrerseits bekannte Funktionen der Zeit sind. Das Potentialproblem wird gelöst für einen unendlich langen halbelliptischen Zylinder (konforme Abbildung), für eine Halbkugel (Legendresche Polynome), ein Rotationsellipsoid und ein halbes allgemeines Ellipsoid (Lamésche Funktionen). Als Beispiel werden die Wasserstoßkräfte an einer unter  $45^\circ$  aufschlagenden Kugel berechnet, indem der eingetauchte Teil durch ein Halbellipsoid angenähert wird. Der vertikale Widerstandsanteil stimmt gut mit Messungen und Rechnungen von Schiffman und Spencer überein. *Pretsch.*

**Silber, Robert:** Sur la pente de la surface libre au voisinage de la profondeur critique pour un écoulement dans un canal. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1450—1452 (1950).

Setzt man in der klassischen Gleichung der freien Fläche des Wassers bei einem prismatischen Kanal die Machsche Zahl gleich 1 (kritische Tiefe), so erhält man für die Neigung den Wert unendlich. Das ist aber praktisch nicht der Fall. Verfbekommt durch Erweiterung dieser Gleichung im allgemeinen eine sehr schwache Neigung. *Dizioglu (Istanbul).*

## Atomphysik.

### Quantenmechanik:

**Coulson, C. A. and N. H. March:** Momenta in atoms using the Thomas-Fermi method. Proc. phys. Soc. London, Sect. A **63**, 367—374 (1950).

Die statistische Methode von Thomas und Fermi wird angewandt, um die Impulsverteilung und die Streuung von Röntgenstrahlen an freien Atomen zu berechnen. Die Ergebnisse werden in einer dimensionslosen Form angegeben, die ihre Anwendung auf alle Atome gestattet. Auch die von Dirac unter Berücksichtigung von Austauscheffekten verbesserte Methode wird auf die gleichen Probleme angewandt. Ein Vergleich mit dem Experiment zeigt jedoch, daß die Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Werte durch die Diracsche Methode nicht wesentlich verbessert wird. *Wüster (Wuppertal).*

**Kar, K. C. and S. Sengupta:** The relative intensity of doublet spectra. Indian J. Phys. **23**, 19—34 (1949).

Die Verff. berechnen zunächst die Energie-Eigenwerte für das Diracsche Elektron im Coulombschen Feld mit einer Näherungsmethode, in der die Spinkorrekturen und die relativistischen als klein angesehen werden. Für diese Glieder werden in den Wellengleichungen für die 2 „großen“ Wellenfunktionen die wellenmechanischen Mittelwerte eingesetzt, die mit Hilfe der Schrödingerfunktionen gebildet sind. Entwicklung nach der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$ , bis  $\alpha^2$  einschließlich. (Es wird noch eine weitere Näherungsmethode für denselben Zweck angegeben, die mir nur durch den Erfolg beim H-Problem, aber nicht allgemein gerechtfertigt scheint, der Ref.) Auch die Linienintensitäten der Dublettspektren werden näherungsweise berechnet. (Die dabei verwendete Näherungsmethode ist mir noch weniger einleuchtend; für den Spin werden Funktionen verwendet, deren Normierungsausdruck divergiert, was die Verff. vermutlich nicht bemerkt haben, der Ref.) Das genäherte Ergebnis der Rechnung ist richtig; streng ist die Rechnung vom Ref. vor 20 Jahren gemacht worden [Ann. Phys., V. F. **6**, 700 (1930)]. *Bechert (Mainz).*

**Sewell, Geoffrey L.:** Stark effect for a hydrogen atom in its ground state. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 678—679 (1949).

Für den Stark-Effekt des Grundzustandes des H-Atoms werden die gestörten Eigenwerte der Energie bis zu Gliedern achter Ordnung in der Feldstärke berechnet. *Wüster (Wuppertal).*



Montchane, Léon: Sur l'irréversibilité du temps et la représentation des notions fondamentales de la Mécanique. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 581—583 (1949).

Der Begriff einer einseitig definierten, einseitig konstanten oder einseitig abgeleiteten Funktion (Denjoy) soll verwendet werden, um die Einseitigkeit in der Physik auszudrücken. Über die möglichen Mannigfaltigkeiten von Diskontinuitäten wird abgeleitet, daß die Quantisierung in der Physik eine logische Notwendigkeit sei.

G. F. v. Weizsäcker (Göttingen).

Bhabha, H. J.: On the postulational basis of the theory of elementary particles. Rev. modern. Phys., New York **21**, 451—462 (1949).

Die Theorie der Elementarteilchen, um die es sich handelt, ist die Wellengleichung in der Form  $(\alpha_k p^k + \beta \chi) \psi = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Die Betrachtungen beziehen sich fast durchweg auf endliche, nicht unitäre Darstellungen der Lorentztransformation. Verf. sucht die Postulate aufzustellen, aus denen diese Gleichung notwendig folgt. Diese sind (1) relativistische Invarianz, (2) die Existenz einer  $\psi$ -Funktion (mit mehreren Komponenten) von den üblichen Eigenschaften, (3) die Annahme, daß aus den  $\psi$ -Werten auf einer raumartigen Oberfläche die  $\psi$ -Werte auf einer zeitlich späteren Fläche berechnet werden können (d. h. die Wellengleichung soll  $\partial/\partial t$  nur linear enthalten; daraus folgt, daß sie auch nur linear von den Koordinatenableitungen abhängen kann); (4) außer  $\psi$ ,  $\psi^*$  und ihren Ableitungen sollen nur universelle Konstanten in die Wellengleichung eingehen; (5) sie soll aus einem Variationsprinzip ableitbar sein, dessen Lagrangefunktion (6) eine ganze rationale Funktion von  $\psi$ ,  $\psi^*$  und ihren Ableitungen ist. Es läßt sich dann zeigen, daß die niedrigsten Terme von Bedeutung in der Lagrangefunktion die Form  $\psi^\dagger \gamma_k p^k \psi + \psi^\dagger \gamma \psi$  haben müssen, mit hermiteschen  $\gamma_k$  und  $\gamma$  ( $\psi^\dagger =$  Hermitesche Konjugierte zu  $\psi$ ). Wegen Postulat (1) müssen sich die  $\gamma^k$  nach  $T^\dagger \gamma^k T = t_k^j \gamma^j$  bzw.  $T^\dagger \gamma T = \gamma$  transformieren, wo  $t_k^j$  eine Matrix der Lorentzgruppe ist. Es existiert aber immer ein  $D$ , so daß  $T^\dagger D T = D$ ; daraus folgt, daß man anstelle von  $\gamma^k$  und  $\gamma$  zwei Terme  $D \alpha^k$  und  $D \beta$  wählen kann, so daß sich die  $\alpha^k$  und  $\beta$  mit  $T^{-1}$  statt  $T^\dagger$  transformieren. Die  $\alpha^k$  und  $\beta$  haben dann eine relativistisch invariante Algebra. Durch geeignete Wahl von  $D$  kann man es so einrichten, daß  $\beta^2 = \beta$  ist, daher  $\beta$ , wenn nicht singulär, nur die Einheitsmatrix sein kann. Die Wellengleichung kann dann in die obenstehende Form gebracht werden, während die Stromkomponenten die Form  $\psi^\dagger D \alpha^k \psi$  haben. Weiter werden Terme von höherer Ordnung in  $\psi$  in der Lagrangefunktion betrachtet und der mathematische Unterschied zwischen den gewöhnlichen nichtlinearen Wechselwirkungstermen und Termen, die wesentliche Nicht-Linearitäten in die Wellengleichung einführen, diskutiert. Es läßt sich zeigen, daß jede Gleichung der vorausgesetzten Form, wenn sie gegenüber Lorentztransformationen ohne Umkehr der Zeitrichtung („orthochron“ L.-Tr.) invariant ist, auch invariant ist gegenüber der vollen Lorentzgruppe. (Es existiert nämlich immer eine Matrix  $R$ , so daß  $\alpha^k R = -R \alpha^k$ ,  $\beta R = R \beta$  für  $k = 0 \dots 3$ ). Diese kehrt also die Richtungen aller vier Koordinaten um. In Verbindung mit der Matrix  $R_s$ , die die Raumkoordinaten spiegelt, ergibt sich damit ein  $R_t = R R_s$ , das nur die Zeitachse umkehrt). Zu jeder statischen Lösung  $\psi = e^{i E_0 t} \Phi$  gehört also eine Lösung  $\psi' = e^{i (-E_0) t} R_t \Phi$ . Insofern als diese Lösungen mit negativer Frequenz als Antipartikel interpretiert werden müssen, folgt aus den Postulaten deren regelmäßige Existenz. Weiter lassen sich mit Hilfe der  $R$ -Matrix die Sätze von Pauli über Energie- und Ladungsdichte für Teilchen mit ganzem und halb-ganzem Spin ableiten. — Ist die Darstellung endlich, so muß die Matrix  $\alpha_k p^k$  einer Minimalgleichung genügen. Aus ihr bestimmen sich die allgemeinen Vertauschungsrelationen der  $\alpha_k$ . Sie kann in der Form geschrieben werden  $(\chi^2 - a_1 p^2)(\chi^2 - a_2 p^2) \dots = 0$ , wobei die  $a_1, a_2, \dots$  die (nichtverschwindenden) Eigenwerte von  $\alpha^0$  sind. Die  $\chi/a_j$  erscheinen dann als mögliche Massenwerte der Teilchen. Nach dem Grade der Minimalgleichung lassen sich die relativistischen Wellengleichungen ordnen. Der Grad 1 ist nicht möglich; der Grad 2 führt eindeutig zu Diracs Gleichung. Zu dem Grade 3 gehört die Duffin-Kemmersche Gleichung. Die Methode der Minimalgleichung zeigt unmittelbar, daß die Duffinschen Vertauschungsrelationen nicht die allgemeinsten ihrer Stufe sind. Verf. gibt ein Beispiel für eine allgemeinere Darstellung.

Wessel (Dayton, Ohio).

Broglie, Louis de et Marie-Antoinette Tonnelat: Sur la possibilité d'une structure complexe pour les particules de spin 1. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1329—1332 (1950).

M. Louis de Broglie a édifié depuis 1934 en de nombreuses publications une théorie du photon prenant pour point de départ l'idée que les particules de spin 1 sont complexes et résultent d'une association étroite ou fusion entre deux corpuscules de spin 1/2 représentés chacun par des solutions de l'équation d'ondes de Dirac. Dans une note de 1936 [C. r. Acad. Sci., Paris **203**, 473 (1936); ce Zbl. **14**, 371] il a publié divers résultats sur la structure interne que sa théorie conduit à attribuer à la particule de spin 1. Récemment E. Fermi et C. N. Young [Phys. Rev., Lan-



caster Pa. 76, 1739—1743 (1949)] ont reconsidéré ce problème et ceci a conduit les auteurs à préciser certains résultats de la note citée de 1936. Partant dans l'espace de configuration  $t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  d'une équation d'ondes à 16 composantes contenant un terme d'interaction  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  de la forme proposée par Fermi, on obtient par une transformation simple une équation d'ondes mettant en évidence les coordonnées du centre de gravité et les coordonnées relatives de la particule complexe. Dans le système de référence propre de la particule dans lequel le centre de gravité est au repos et où les fonctions d'ondes ne dépendent plus que des coordonnées relatives, on obtient une équation déterminant les états quantifiés internes de la particule. L'examen de cette équation montre qu'à coté des états correspondant au spin 0 représentés par les solutions de Fermi, il existe une autre série d'états quantifiés correspondant au spin 1. Ces solutions internes permettent de caractériser dans le système propre les fonctions d'ondes décrivant le mouvement du centre de gravité et de retrouver dans un système galiléen quelconque, pour le mouvement du centre de gravité, les équations d'ondes de la particule de spin maximum 1 de telle sorte que le spin se trouve reporté sur le centre de gravité du système formé à partir des deux corpuscules se spin 1/2. Petiau (Paris).

**\*Broglie, Louis de:** Remarques complémentaires sur la structure complexe des particules de spin 1. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1434—1437 (1950).

Complétant les résultats de la Note précédente l'A. examine la forme que l'on doit adopter pour les fonctions d'ondes de la particule complexe de spin maximum 1 dans le système propre et la forme des fonctions d'ondes du centre de gravité qui en résultent en réalisant correctement le transport du spin sur le centre de gravité. Les résultats obtenus expliquent pourquoi, dans la théorie de la particule de spin 1, la densité de probabilité de présence dans le cas d'une onde plane monochromatique correspondant à la vitesse  $\beta c$  de la particule a la forme  $\sum_{r,s} |\Phi_{rs}|^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Petiau (Paris).

**Feynman, B. P.:** A relativistic cut-off for classical electrodynamics. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 939—946 (1948).

In der Maxwell'schen Theorie kann man die halbe Summe aus retardierten und avancierten Potentialen bei vorgegebenem Strom mit Hilfe einer „Greenschen Funktion“  $D - 1/4\pi \cdot \delta(x_\mu^2)$  berechnen. Ähnlich wie Bopp [Z. Naturforsch. 1, 53 (1946)] und andere ersetzt Verf. diese singuläre Funktion durch eine reguläre, deren Form noch weitgehend willkürlich ist. Um den Grundgedanken seiner Absorbertheorie [J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. modern Phys. 17, 157—181 (1945)] wieder anwenden zu können, weicht er in der Definition der verallgemeinerten retardierten Potentiale von Bopp ab. (Vgl. hierzu McManus, dies. Zbl. 31, 230.) Die Bewegungsgleichungen werden aus dem verallgemeinerten Fokkerschen Wirkungsprinzip hergeleitet und enthalten als Abänderung eine Trägheitsrückwirkung, während die Strahlungsdämpfung ungeändert bleibt. Weiter diskutiert Verf. den Durchgang eines Teilchens durch eine Potentialschwelle und findet aus dem Wirkungsprinzip neben der üblichen Lösung eine andere, bei der im Gebiet hohen Potentials die Bahnkurve in die Vergangenheit läuft, d. h. die Änderung der Zeit und der Eigenzeit verschiedene Vorzeichen haben. Er sieht hierin ein klassisches Analogon zum Kleinschen Paradoxon, deutet also diesen Teil des Weges als Bahn eines Positrons. Im Anhang geht Verf. auf die Schwierigkeit negativer Energie in dem ersten Ansatz von Bopp ein. — Die Formel vor (16) ist falsch. [R. P. Feynman, Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 776 (1949)]. Höhler (Berlin).

**Irving, J.:** Applications of the Peierls-McManus classical finite electron theory. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 780—790 (1949).

Es werden im Rahmen der verallgemeinerten klassischen Elektrodynamik von

Peierls und McManus (dies. Zbl. 31, 230) zwei Fälle durchgerechnet, bei denen die nichtlinearen Bewegungsgleichungen durch lineare angenähert werden können: die Bewegung eines Elektrons in einem schwachen Feld beliebiger Frequenz und die Streuung eines Elektrons an einem schweren Teilchen kleiner Ladung.

Höhler (Berlin).

Thirring, W.: Regularization as a consequence of higher order equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 570 (1950).

Es wird am Beispiel des skalaren Feldes gezeigt, daß Feldgleichungen der Form

$\prod_{i=1}^n (\square - m_i^2) \Phi(x) = 0$  auf regularisierte Vertauschungsfunktionen  $\sum_{i=1}^n c_i \Delta(x; m_i)$  mit  $\sum c_i = 0$  führen.

Lehmann (Jena).

Benoist-Gueutal, Pierette, Jacques Prentki et Jean Ratier: Sur la production des mésons nucléaires par les photons (méson de spin 0). C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1146—1148 (1950).

Die am Synchrotron in Berkeley beobachtete Erzeugung von Mesonen bei Wechselwirkung von Photonen mit Nukleonen wird rechnerisch untersucht unter der Annahme, daß es sich um skalare und pseudoskalare Mesonen handelt. Man benützt das Störungsverfahren von Feynman [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S., 76, 749—759 und 769—789 (1949)] und beschränkt sich auf Prozesse zweiter Ordnung. Man findet zunächst das in der Mesonentheorie bereits bekannte Ergebnis wieder [Case, dies. Zbl. 33, 328], daß nämlich bei pseudoskalaren Mesonen die pseudovektorielle Kopplung auf die pseudoskalare Kopplung zurückgeführt werden kann. Man berechnet dann die Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung positiver und negativer skalarer bzw. pseudoskalarer Mesonen und interessiert sich insbesondere für das Verhältnis  $\bar{\Sigma}/\Sigma^+$ . Unter Berücksichtigung der Energieverteilung der Photonen, die das Synchrotron liefert, erhält man einen Überschuß an negativen Mesonen, der am größten ist bei Mesonenenergien um 60 Mev. Es ist an dieser Stelle  $\bar{\Sigma}/\Sigma^+ = 1,7$  in der pseudoskalaren Theorie,  $\bar{\Sigma}/\Sigma^+ = 1,45$  in der skalaren Theorie. Mit der Erfahrung [Science 109, 438; 110, 579 (1949)] stimmt am besten das Ergebnis nach der pseudoskalaren Theorie überein. K.-H. Höcker (Stuttgart).

Teichmann, T.: Some general properties of nuclear reaction and scattering cross sections. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 506—515 (1950).

Verf. untersucht das Verhalten der Streuquerschnitte in der Nähe von Resonanzen und zwischen ihnen. In der Umgebung einer Resonanzstelle verläuft der Wirkungsquerschnitt gemäß der Breit-Wigner-Formel, wenn man von Beiträgen der Größenordnung  $(\Gamma/D)^2$  absieht.  $\Gamma$  bedeutet die Breite der Resonanzlinie,  $D$  deren Abstand von der nächsten. Das Minimum zwischen den beiden Resonanzen kann verschiedene Höhen haben [Unterschied um einen Faktor  $(\Gamma/D)^2$ ]. Es kann aber auch ein nicht durch Resonanzen bedingtes flaches Maximum zwischen den wahren Resonanzmaxima auftreten.

K.-H. Höcker (Stuttgart).

Bargmann, V.: On the connection between phase shifts and scattering potential. Rev. modern Phys., New York 21, 488—493 (1949).

Für den Fall der reinen  $S$ -Streuung ( $l=0$ ) wird untersucht, inwieweit das Streupotential  $V(r)$  durch die Phasenänderung  $\delta_0(E)$  der 0-ten Partialwelle bestimmt ist. Das einzige qualitative Kriterium, das man angeben kann, besagt, daß zwei zur gleichen Phasenänderung gehörige Potentiale identisch sind, wenn keines stationäre Zustände zuläßt oder wenn sie beide so rasch nach außen abfallen, daß

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{\alpha r} |V(r)| dr$$

für alle positiven  $\alpha$  konvergiert. (Das Gauß-Potential genügt diesem Kriterium, das Exponentialpotential nicht mehr.) Andernfalls können die beiden Potentiale

gebundene Zustände von verschiedener Energie haben, ja es gibt sogar kontinuierliche Folgen von Potentialen zur gleichen Phase. — Die Unbestimmtheit der Energieniveaus hängt zusammen mit den „falschen Polen“, die bei der analytischen Fortsetzung der  $S$ -Matrix nach Kramers auftreten und denen keine diskreten Zustände entsprechen. (Kennt man das Verhalten der  $S$ -Matrix nicht nur auf der positiv reellen Energieachse, sondern auch in einer infinitesimalen Umgebung derselben, so lassen sich die stationären Zustände des Systems eindeutig bestimmen.) *Oehme.*

**Richardson, H. O. W.:** Ellis and Aston's theory of the height of a photoelectron line. *Proc. phys. Soc. London, Sect. A* **63**, 234—240 (1950).

Die durch monochromatische  $\gamma$ -Strahlung aus einer dicken Schicht ausgelösten Photoelektronen besitzen nicht eine einheitliche Geschwindigkeit. Vielmehr beobachtet man infolge der Energieverluste der Photoelektronen in der Schicht bei der magnetischen Analyse der Geschwindigkeiten eine verbreiterte Linie. Für die Zahl der Photoelektronen mit einer Geschwindigkeit, die dem Scheitelpunkt der Linie entspricht, haben Ellis und Aston im Jahre 1930 eine Formel angegeben. Diese Formel wird nun auf Grund neuerer Arbeiten über den Durchgang von Elektronen durch Materie korrigiert, wobei die Effekte der Mehrfachstreuung, des Energieverlustes durch Bremsstrahlung und der Richtungsabhängigkeit der photoelektrischen Emission berücksichtigt werden. *F. Sauter* (Göttingen).

### Bau der Materie:

**Slater, N. B.:** Aspects of a theory of unimolecular reaction rates. *Proc. R. Soc., London, A* **194**, 112—131 (1948).

Der unimolekulare Zerfall komplizierter Moleküle läßt sich dadurch erklären, daß in genügend hoch angeregten Molekülen gelegentlich so viel Schwingungsenergie in einer Bindung angehäuft wird, daß die Dissoziationsenergie überschritten wird. Eine vereinfachte Behandlung betrachtet die Schwingungen des Moleküls als harmonisch, und berücksichtigt die Anharmonizität der kritischen Bindung durch die Annahme, daß Zerfall eintritt, sobald die Elongation  $q_1$  dieser Bindung einen kritischen Wert  $q_0$  überschreitet. Da  $q_1$  eine Koordinate in einem System gekoppelter harmonischer Oszillatoren ist, läßt es sich allgemein darstellen in der Form

$$q_1(\psi) = \sum a_s \cos 2\pi(\nu_s t + \psi_s); \quad a_s = \alpha_{1s} \sqrt{\epsilon_s},$$

wobei  $\epsilon_s$  die Anregungsenergie und  $\nu_s$  die Frequenz der  $s$ -ten Normalschwingung ist. Damit läßt sich die Zerfallsgeschwindigkeit finden, wenn man die asymptotische Verteilung der Nullstellen von  $F = q_1(t) - q_0$  kennt, die dann nachträglich noch über eine Boltzmannverteilung der  $\epsilon_s$  zu mitteln ist. Die asymptotische Dichte  $L$  der Nullstellen ist [nach M. Kac, *Amer. J. Math.* **65**, 609 (1943)] gleich

$$L = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos q_0 \xi}{\eta^2} \{ \pi J_0(a_s \xi) - \pi J_0(a_s \sqrt{\xi^2 + (2\pi \nu \eta)^2}) \} d\eta d\xi.$$

Die Mittelung über die  $\epsilon_s$  gibt dann die Geschwindigkeitskonstante

$$K = \int L f(\epsilon) d\epsilon_1 \dots d\epsilon_n = \nu \exp(-E_0/kT).$$

Dabei ist  $E_0$  die Aktivierungsenergie und  $\nu^2 = \sum \alpha_{1s}^2 \nu_s^2 / \sum \alpha_{1s}^2$ . Die Arbeit enthält eine vereinfachte Ableitung der Kacschen Formel und vergleicht die Methode mit anderen Rechnungen, die nicht explizit die Theorie der fastperiodischen Funktionen heranziehen. Ferner werden verschiedene physikalische Interpretationen der „mittleren Frequenz“ gegeben. *Koppe* (Vancouver).

**Spenke, Eberhard:** Die Diffusionstheorie der positiven Säule mit Berücksichtigung der stufenweisen Ionisierung. *Z. Phys.* **127**, 221—242 (1950).



In der Diffusionstheorie der positiven Säule von Schottky wird angenommen, daß im Gas Träger erzeugt werden nur durch direkten Elektronenstoß (Trägererzeugung  $\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}$  prop. der Elektronendichte  $n$ , und zwar  $= n/\tau$ ), daß die Träger nur verschwinden durch ambipolare Diffusion an die Rohrwand ( $D$  = ambipolarer Diffusionskoeffizient) und daß die Trägerdichten an der Rohrwand null sind. Die Differentialgleichung für die Dichteverteilung der Träger über den Rohrquerschnitt ist dann linear und führt aus den Randbedingungen zu einer Beziehung zwischen der Querdimension des Entladungsrohres und den Konstanten  $\tau$  und  $D$ . Verf. hat nun die Theorie *ceteris paribus* ausgedehnt auf den Fall, daß die Trägererzeugung gegeben ist durch  $n/\tau + \alpha n^2$ , was physikalisch eine Berücksichtigung auch einer Stoßionisierung in zwei Stufen bedeutet (nach derselben Methode läßt sich auch die Rekombination zwischen Elektronen und positiven Ionen im Gas berücksichtigen. Der Ref.). Die Differentialgleichung für die Dichteverteilung ist dann nicht mehr linear. Sie lautet (in dimensionslosen Größen geschrieben) für die Zylindersäule a)  $d^2n/d\varrho^2 + \varrho^{-1} dn/d\varrho + n + \nu n^2 = 0$  und analog für die Säule zwischen ebenen Wänden b)  $d^2n/d\xi^2 + n + \nu n^2 = 0$ . Die Lösung von b) führt auf elliptische Funktionen und ist durch die beiden Nebenbedingungen  $n(0) = 1$  und  $n'(0) = 0$  bereits vollständig festgelegt. Verlangt man noch die Erfüllung der Nebenbedingung, daß die Konzentration an den beiden Wänden verschwinden soll, die sich in der Form schreibt  $n(\xi_{\text{Rand}}) = n(\frac{1}{2} B/\sqrt{D\tau}) = 0$ , so ist das nur dadurch möglich, daß eine bestimmte Beziehung zwischen  $D$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$ , der Konzentration in der Mitte und dem Abstand  $B$  der Wände voneinander besteht. Physikalisch bedeutet dies letzten Endes, daß die implizite in  $D$ ,  $\tau$  und  $\alpha$  enthaltene Elektronentemperatur von der Stromstärke abhängt. Sie wird durch die quadratischen Prozesse merklich verkleinert, während die Elektronenverteilung praktisch dieselbe bleibt. Die Lösung von a) dürfte analog wie die von b) gegenüber trigonometrischen Funktionen für den Schottkyschen Ansatz zu elliptischen Funktionen führte, nun zu einer Verallgemeinerung von Besselfunktionen führen. Behandelt werden der Fall sehr kleiner und sehr großer Werte von  $\nu$  durch Näherungsverfahren. Die Arbeit ist in angenehmer Ausführlichkeit und erläutert durch instruktive Figuren geschrieben.

*E. Seeliger* (Greifswald).

**Kaufman, Bruria: Crystal statistics. II. Partition function evaluated by spinor analysis.** Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1232—1243 (1949).

Wie von Onsager sowie von Kramers und Wannier [Phy. Rev., Lancaster Pa., II. S. **65**, 117 (1944), **60**, 252—262 u. 263—276 (1941); dies. Zbl. **27**, 285] gezeigt wurde, kann die Zustandssumme  $Z = \sum \exp(n_i \varepsilon/kT)$  ( $\varepsilon$  Wechselwirkungsenergie zwischen ungleichen Nachbarn,  $\sum$  über alle Atomverteilungen) einer zweidimensionalen binären Legierung durch die Eigenwerte einer  $2^n$ -dimensionalen Matrix  $V$  ( $n$  Zahl der Atome in einer Gitterreihe) dargestellt werden und ist näherungsweise durch den größten Eigenwert bestimmt. In der vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, daß  $V$  sich als  $2^n$ -dimensionale „Spindarstellung“ einer  $2n$ -dimensionalen orthogonalen Drehungsmatrix auffassen läßt, indem jedem Atom der einen Sorte der Spin  $+1$ , jedem Atom der anderen Sorte der Spin  $-1$  zugeordnet wird. Durch Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften der Drehungsmatrix kann diese als Produkt von  $n$  ebenen Drehungsmatrizen geschrieben werden, so daß die gesuchten Eigenwerte durch die Lösungen von  $n$  quadratischen Gleichungen ausgedrückt werden können. Es ergibt sich, daß  $Z$  in guter Näherung durch den größten Eigenwert allein bestimmt ist. Die Matrix der Eigenvektoren von  $V$  gestattet es, den Ordnungsgrad binärer Legierungen anzugeben (siehe das folgende Referat. Vgl. auch C. Domb, dies. Zbl. **35**, 286).

*A. Kochendörfer* (Stuttgart).

**Kaufman, Bruria and Lars Onsager: Crystal statistics. III. Short-range order in a binary ising lattice.** Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1244—1252 (1949).



Zunächst wird der Ordnungsgrad einer zweidimensionalen binären Legierung, in welcher nur nächste Nachbarn miteinander in Wechselwirkung stehen, durch „Korrelationsfunktionen“ ausgedrückt. Diese Funktionen geben die mittlere Wahrscheinlichkeit an, daß die Atompaare bestimmter gegenseitiger Lage gleiche Atome sind. In der Ausdrucksweise der vorhergehenden Mitteilungen (s. vorsteh. Referat), in welcher der mathematische Formalismus zur Berechnung der Korrelationsfunktionen entwickelt worden ist, besagt dies, daß die zugeordneten Spins dasselbe Vorzeichen besitzen. Die Korrelationsfunktionen selbst werden durch geeignete Funktionen  $\Sigma_i$  ausgedrückt, die durch elliptische Substitutionen berechnet werden können. Da die Variable der Funktionen  $\varepsilon/kT$  ist ( $\varepsilon$  Wechselwirkungsenergie zwischen ungleichen Nachbarn), so ergeben sich die  $\Sigma_i$  und damit der Ordnungsgrad als Funktionen der Temperatur  $T$ . Diese Abhängigkeiten werden für die 5 kürzesten Atomabstände berechnet (Nahordnung), ihre Berechnung für größere Abstände (Fernordnung) soll in dem folgenden Teil IV durchgeführt werden. Es ergibt sich, daß bei tiefen Temperaturen alle Korrelationsfunktionen gleich 1 sind (vollständige Ordnung). In der Umgebung der kritischen Temperatur  $T_k$  beginnen sie abzunehmen, und zwar um so rascher, je größer die Entfernung der Atome der betrachteten Paare ist (Übergang zur Unordnung unter Aufrechterhaltung einer gewissen Nahordnung). Bei der kritischen Temperatur selbst nimmt die Korrelationsfunktion, wenn auch sehr langsam, mit zunehmender Entfernung der Atome auf Null ab, so daß bei dieser Temperatur keine Fernordnung besteht. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

**Mataré, H. F.:** *Bruit de fond de semiconducteurs. I.* J. Phys. Radium, VIII. S. 10, 364—372 (1949).

Das Widerstandsrauschen eines Halbleitergleichrichters wird auf Grund eines Ersatzschaltbildes und einer empirischen Kennlinie für den Gleichrichter behandelt, wobei die Methode von Nyquist benutzt wird. Dabei tritt neben dem thermischen Rauschen der Widerstände noch ein zur Stromstärke proportionaler Schroteffekt auf, der als Widerstandsrauschen eines Widerstandes auf einer höheren Temperatur  $pT$  behandelt wird.  $p$  läßt sich dann aus dem Vergleich mit einer Diode im Sättigungsgebiet berechnen. *Koppe* (Vancouver).

**Heywang, Walter:** Über den Einfluß isolierter Gitterstörungen auf den elektrischen Widerstand elektronischer Halbleiter und seine Temperaturabhängigkeit. Z. Naturforsch. 4a, 654—664 (1949).

Der von W. Meyer empirisch gefundene Zusammenhang  $\log a = c_1 \varepsilon + c_2$  zwischen der Aktivierungsenergie  $\varepsilon$  und der Mengenkosten  $a$  in der Leitfähigkeitsformel  $\sigma = a \exp(-\varepsilon/kT)$  mancher Halbleiter wird theoretisch im Rahmen des Bandmodells zu begründen versucht. Als Einfluß isolierter Gitterstörungen auf die Energieeigenwertverteilung findet Verf.: 1. die erlaubten Bänder erleiden als Ganzes eine Verschiebung proportional der Störstellendichte, 2. die einzelnen Eigenwerte werden in ihrem Band geringfügig verschoben, 3. die Lage der Störniveaus ist unabhängig von der Störstellendichte. Mit diesen Ergebnissen führt jedoch das Wilsonsche Halbleitermodell nicht auf die Meyersche Regel. Es wird deshalb zusätzlich angenommen, daß Elektronen am Rande eines erlaubten Bandes ihren Impuls und damit ihre Beweglichkeit exponentiell mit der Gitterstörung verringern. — Zur Deutung des positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes, den einige Halbleiter in gewissen Bereichen zeigen, wird ein Modell mit 2 Störniveaus angegeben und durchgerechnet. *W. Dürr* (Stuttgart).

**Laue, M. v.:** Eine nichtlineare, phänomenologische Theorie der Supraleitung. Ann. Phys., VI. F. 5, 197—207 (1949).

Zwei verschiedene letzthin entwickelte Verallgemeinerungen der phänomenologischen Theorie der Supraleitung (richtungsabhängiges  $\lambda$  bzw. stromstärkeabhängiges  $\lambda$ ) werden in eine einheitliche Theorie zusammengefaßt. Die Grundgleichungen werden mittelst des Supraimpulses  $\mathfrak{G}$  formuliert:  $\partial \mathfrak{G} / \partial t = \mathfrak{E}$ ;  $-c \operatorname{rot} \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ . In



der ursprünglichen Theorie war  $\mathcal{G} = \lambda \mathcal{J}'$ . Jetzt wird hingegen angenommen, daß  $\mathcal{G}$  eine Funktion der Komponenten von  $\mathcal{J}'$  sein kann, die lediglich der Integrabilitätsbedingung  $\partial \mathcal{G}_i / \partial \mathcal{J}_k - \partial \mathcal{G}_k / \partial \mathcal{J}_i = 0$  unterworfen ist. Neben  $\mathcal{G}$  tritt noch ein Vektor  $\mathcal{D}$  auf, den man als „mittleren Supraimpuls“ bezeichnen könnte, und der festgelegt ist durch die Bedingung, daß er parallel zu  $\mathcal{G}$  ist, und daß

$$\frac{1}{2} (\mathcal{J}' \mathcal{D}) = \int_0^G (i \, d\mathcal{G})$$

gilt. Der Londonsche Spannungstensor ist dann gegeben durch

$$G_{ik} = \mathcal{G}_i \mathcal{J}'_k - \frac{1}{2} S_{ik} (\mathcal{J}' \mathcal{D})$$

und es läßt sich damit zeigen, daß die erweiterte Formulierung zu keinen Widersprüchen führen kann. Koppe (Vancouver).

**Schubert, Gerhard U.: Abkühl- und Einschaltvorgänge an Supraleitern nach der von Laueschen Theorie.** Ann. Phys., VI. F. 5, 213—236 (1949).

1. Verdrängung eines Magnetfeldes aus einem Supraleiter, der vom Sprungpunkt auf eine tiefere Temperatur abgekühlt wird. Räumliche Temperaturunterschiede werden nicht berücksichtigt, so daß man annehmen kann, daß die Londonsche Konstante  $\lambda$  eine reine Zeitfunktion ist. Mit geeigneten dimensionslosen Variablen führt das auf die partielle D.-Gl.

$$\partial^2 H / \partial x^2 - \partial H / \partial W - f(\omega) H = 0; \quad H(0, \omega) = H(x, 0) = H_0,$$

[wobei  $f(W)$  eine gegebene Funktion ist, die vom zeitlichen Verlauf der Temperatur abhängt]. Es zeigt sich, daß, wenn die Abkühlung nicht zu langsam vor sich geht, die Verdrängung des Magnetfeldes im wesentlichen nach erfolgter Abkühlung mit einer Halbwertszeit  $\sigma \lambda_0$  erfolgt. 2. Verhalten eines Supraleiters bei konstanter Temperatur und veränderlichem Magnetfeld. Um Schwierigkeiten, die aus der Rückwirkung der Vorgänge im Supraleiter auf das Spulensystem, welches das Magnetfeld erzeugt, zu vermeiden, wird das Verhalten eines supraleitenden Halbraumes gegenüber einer von außen anlaufenden magnetischen Kopfwelle untersucht, die so eingerichtet ist, daß das Magnetfeld an der Oberfläche des Supraleiters mit einer Abklingzeit  $1/\alpha$  von Null auf einen konstanten Wert  $H_0$  anwächst. Wenn  $1/\alpha$  groß genug ist, dann verläuft der Vorgang zum größten Teil quasistationär. Beim Eintreffen der Kopfwelle spielen sich jedoch zwei verschiedene Abklingprozesse ab: ein sehr schneller mit der Halbwertszeit  $1/\sigma$ , der durch die Ohmschen Ströme bedingt ist, und ein langsamer mit der Halbwertszeit  $\sigma \lambda$ , der durch die Kopplung zwischen Ohmschen Strömen und Supraströmen entsteht. Koppe (Vancouver).

**Wiśniewski, Félix Joachim: Sur la théorie de la supraconductibilité.** C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1964—1965 (1948).

Die vorliegende Note bringt zunächst eine Variante des bekannten Beweises, daß für die Elektrodynamik freier Elektronen (N.B., die sich gegenseitig nicht beeinflussen dürfen) so etwas Ähnliches wie die v. Laue-Londonschen Gleichungen gilt. Dabei kommt scheinbar die zweite Londonsche Gleichung richtig heraus. Das liegt aber daran, daß kurzerhand das Geschwindigkeitsfeld einer Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung des Einelektronenproblems mit dem Strömungsfeld in einem Supraleiter identifiziert wird. — Aus diesem Resultat wird dann der Schluß gezogen, daß sich die Elektronen in einem Supraleiter ohne Widerstand bewegen. Das wird damit erklärt, daß bei tiefen Temperaturen die Schwingungen der Atome mit so kleinen Amplituden erfolgen, daß genügend viele zusammenhängende freie Räume bleiben, in denen sich die Elektronen reibungslos bewegen können. Koppe (Vancouver).



## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Jekhowsky, Benjamin de:** Sur la détermination du paramètre dans le problème d'Euler. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1925—1927 (1949).

Aus den heliozentrischen Entfernungen und dem Zeit- und Winkelabstande zweier Planetenörter soll die Bahn berechnet werden. Diese Aufgabe ist von Euler gestellt und mit einer Näherungsformel für den Bahnparameter  $p$  auch ungefähr gelöst worden. Gauß und Andoyer gaben strenge Lösungen, die aber mehrere Iterationsschritte erforderten. Verf. kommt beim Andoyerschen Verfahren mit einem Schritte aus, indem er sogleich eine gute Näherung für  $p$  verwendet. Diese hat die Gestalt der Eulerschen Formel, in der ein Faktor durch eine Potenzreihe ersetzt ist.

Bödewadt (Brunoy).

**Rawer, Karl:** Optique géométrique de l'ionosphère. Rev. sci., Paris 86, 585—600 (1948).

Das Feld der Raumwellen bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über die Erde wird, ausgehend von einer Arbeit von Försterling und Ref., nach geometrisch optischen Methoden berechnet. Für die Reichweite, welche dem Weg in die Ionosphäre (inhomogenes Medium) entspricht, ergibt sich (ebene Erde) ein Ausdruck:

$$D_1 = 2 \sin \alpha_0 Y_m \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - q^2 (2y - y^2)}},$$

der unmittelbar integriert werden kann. Bei Berücksichtigung der Erdkrümmung lautet das entsprechende Integral:

$$D_1 = 2 \frac{R}{R_0} Y_m \sin \alpha_0 \int_0^{y_1} \frac{dy}{(1 + \varepsilon y) \sqrt{[1 - q^2 (2y - y^2)] (1 + \varepsilon y)^2 - \sin^2 \alpha_0}},$$

worin  $\varepsilon y \ll 1$ . Vernachlässigt man Glieder höherer Ordnung, so erhält man mit der Abkürzung  $q' = q - \varepsilon \sin^2 \alpha_0 / q$  den Ausdruck:

$$D_1 = 2 \frac{R}{R_0} Y_m \sin \alpha_0 \int_0^{y_1} \frac{(1 - 2\varepsilon y) dy}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - 2qq'y + q^2 y^2}},$$

dessen Integral bekannt ist. Gegenüber der Berechnung von Försterling und Ref. wird eine verbesserte Annäherung in der Nähe des Grenzwinkels angestrebt. Die Feldstärke wird aus der geometrisch räumlichen Verteilung der vom Sender ausgestrahlten Energie über die Erdoberfläche berechnet. Ein in den Raumwinkel  $\Delta\beta$  ausgestrahltes „Strahlenbündel“ hat am Empfangsort in der Vertikalebene die Ausdehnung  $\Delta_v = -\sin \beta \Delta D$ , worin  $\Delta D = \Delta\beta dD/d\beta$ . Diese für die Feldstärke maßgebende Größe wird berechnet und in Kurven  $\Delta_v/\Delta\beta$  als Funktion von  $\beta$  bzw.  $D$  dargestellt. Die Berücksichtigung der Erdkrümmung ergibt besondere Fokussierungswirkungen. — Für die horizontale Ausdehnung des unter dem Winkel  $\Delta\gamma$  (in horizontaler Richtung gerechnet) ausgestrahlten Bündels am Empfangsort folgt:

$$\Delta_H = \frac{R}{\cos \beta} \sin\left(\frac{D}{R}\right) \Delta\gamma. \quad \Delta_H/\Delta\gamma \text{ wird ebenfalls in Abhängigkeit von } D \text{ bzw. } \beta \text{ dargestellt.}$$

Für die Feldstärke folgt:  $E = E_0 \sqrt{\frac{\Delta\beta \Delta\gamma}{\Delta_v \Delta_H}}$ . Diese Funktion wird für einfache und mehrfache Reflexion an der Ionosphäre in Abhängigkeit von der Reichweite  $D$  dargestellt.

Lassen (Berlin).

• **Mieghem, J. van and L. Dufour:** Thermodynamique de l'atmosphère. Bruxelles: Office international de Librairie 1949. 248 p.

**Scorer, R. S.:** The dispersion of a pressure pulse in the atmosphere. Proc. R. Soc., London, A 201, 137—157 (1950).



Verf. stellt sich die Aufgabe, die in einer großen Entfernung von einem Explosionsherd aufgezeichneten Registrierungen der Druckschwankungen infolge einer Explosion zu studieren. Diese wird mathematisch durch ein Fourier-Integral dargestellt und entspricht einer plötzlichen Volumenerweiterung an einer Stelle am Boden der Atmosphäre. Die hieraus folgende Druckschwankung ist für verschiedene Entfernungen von der Störungsquelle berechnet und zwar für eine Modellatmosphäre mit konstantem Vertikalgradienten der Temperatur in der Troposphäre und einer isothermen Stratosphäre. Die Druckschwankungen breiten sich als Schwerewellen mit einer Periode  $> 111$  sec aus, die den einzelnen Ort passierenden Druckschwankungen sind Schwingungen mit abnehmender Amplitude und bis zu 12,7 sec abnehmender Periode. Diese Ergebnisse der Rechnung werden mit den Druckregistrierungen europäischer Stationen gelegentlich des Falls des Großen Sibirischen Meteors 1908 verglichen, dessen Energie auf Grund dieser Rechnung geschätzt werden konnte. — Die Bewegungsgleichungen werden durch Einführung eines geeigneten Zeitfaktors auf Schwingungen beschränkt. Ein besonders eigener Gedanke ist die Definition des modifizierten Drucks durch die Gleichung

$$\bar{\omega}_0 + \bar{\omega} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot R \cdot \left( \frac{p_0 + p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \text{ wo durch den Index 0 die ungestörte Atmosphäre, die Indizes 1 und 2 die Größen am Boden oder an der Tropopause, durch indexfreie Zustandsgrößen die Störungen bezeichnet werden; } \gamma \text{ und } R \text{ sind die bekannten thermodynamischen Konstanten.}$$

Für die Störung des modifizierten Drucks werden dann zwei gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung abgeleitet, von denen die eine die Abhängigkeit von der horizontalen, die andere die Abhängigkeit von der vertikalen Koordinate beschreibt, Gl. 11 und 12. Nach Festlegung der Randbedingungen, die aus den Eigenschaften der Modellatmosphäre gefolgert werden, wird dann eine Lösung für die Abhängigkeit der Druckschwankung von dem räumlichen und zeitlichen Abstand von der Explosion gefunden und dabei die Dispersion der Druckwelle aufgedeckt. Gleichzeitig wird ein Ausdruck für die relative Intensität der Druckschwankung gewonnen. Die letzten Abschnitte der Arbeit behandeln die Form der Explosionswelle, die Auswertung der vom Verf. benutzten Integrale und den Vergleich von Rechnung und Beobachtung. — In der Reihe der Studien über die Ausbreitung von Druckwellen in der Atmosphäre ist die vorliegende Arbeit wegen der Entwicklung der Technik in der Verwendung der mathematischen Hilfsmittel ein wichtiges Glied. Sie schließt an die Studien von Pekeris aus dem Jahre 1948 über denselben Gegenstand an; hierüber ist in dies. Zbl. **32**, 337 berichtet.

B. Neis (Berlin).

**Elsasser: Induction effects in terrestrial magnetism. III. Electric modes.** Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **72**, 821—833 (1947).

In einer Folge von drei zusammengehörigen Arbeiten (Teil I in Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **69**, 106 (1946), Teil II ebenda **70**, 202 (1946)) untersucht Verf. die (an sich bekannten) Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes an und in einer Metallkugel und ihre Anwendung zur Deutung der säkularen Schwankungen des Erdmagnetismus. Außer den gewöhnlichen schnellen Schwingungen gibt es noch zwei Typen aperiodisch gedämpfter langsamer Schwingungen mit Abklingzeiten von einigen  $10^4$  Jahren, bei denen man das Maxwellglied mit dem Verschiebungsvektor vernachlässigen kann und daher zu Differentialgleichungen vom Charakter der Wärmeleitungsgleichung kommt. Bei dem ersten Typ handelt es sich um Felder von der Art magnetischer Dipol-, Quadrupol- usf. -Felder; und diese Schwingungen, im besonderen die Dipolschwingungen, werden in den ersten beiden Teilen ausführlich diskutiert. — Im vorliegenden dritten Teil untersucht nun Verf. den anderen Typ von Schwingungen, welche den Charakter elektrischer Multipolfelder besitzen, sowie deren Kopplung mit den Schwingungen des ersten Typs. Eine Kopplung zwischen diesen beiden Feldarten entsteht dabei durch die Annahme einer zusätzlichen schwachen Rotation des Metallkerns in der Erde und wird formal durch ein Zusatzglied im Induktionsgesetz beschrieben, herrührend von der Lorentzkraft. Es zeigt sich, daß hierdurch mit dem magnetischen Dipolfeld am stärksten das elektrische Quadrupolfeld gekoppelt ist, wobei freilich das zugehörige elektrische Feld im Außenraum zu schwach ist, um experimentell nachgewiesen zu werden. Verf. diskutiert dann noch die Möglichkeit eines Aufschaukelungseffektes zwischen diesen beiden Feldtypen durch eine Art Rückkoppelung und spricht die Vermutung aus, daß sich auf diese Weise die säkularen Schwankungen des Erdmagnetismus vielleicht verstehen lassen.

Sauter (Göttingen).